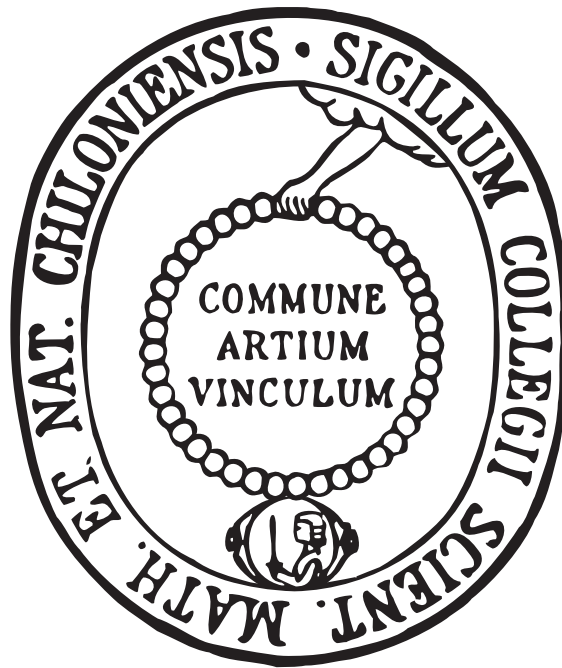


# Über Schraubenmannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^n$



Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades der  
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der  
Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

vorgelegt von  
Martin Scheffel

Kiel  
Dezember 2012



Referent:

Prof. Dr. J. Heber

Korreferent:

Prof. Dr. D. Müller

Tag der mündlichen Prüfung:

31.01.2013

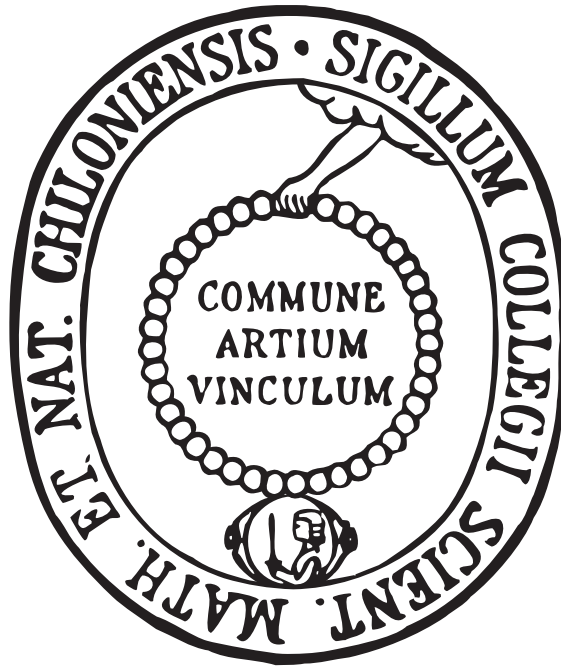
Zum Druck genehmigt:

31.01.2013

gez. Prof. Dr. Wolfgang Duschl, Dekan



# Über Schraubenmannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^n$



Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades der  
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der  
Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

vorgelegt von  
Martin Scheffel

Kiel  
Dezember 2012



## Zusammenfassung

Eine Kurve  $c$  im  $\mathbb{R}^N$ , deren Frenetkrümmungen konstant sind, heißt Schraubenlinie. Mit geeigneten  $X \in \mathfrak{so}(N)$  und  $\xi_0 \in \text{Kern}(X)$ ,  $\xi_1 \in \text{Bild}(X)$  gilt  $c(t) = t\xi_0 + e^{tX}\xi_1 - \xi_1 + c(0)$ . Es seien  $M \subset \mathbb{R}^N$  eine  $n$ -dimensionale, vollständige, zusammenhängende Untermannigfaltigkeit und  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  eine Geodätische in  $M$ . Dann heißt  $M$  helikale Mannigfaltigkeit, wenn alle Geodätischen Schraubenlinien mit denselben Frenetkrümmungen sind. Es ist bekannt, dass eine helikale Mannigfaltigkeit entweder ein affiner Untervektorraum oder eine Blaschkemannigfaltigkeit ist, siehe Sakamoto [Sak86b]. Ferner sind helikale Mannigfaltigkeiten genau diejenigen Untermannigfaltigkeiten, so dass jede Geodätische in jedem Punkt Normalschnitt ist, vergleiche Verheyen [VC84]. Wir geben zunächst einen neuen Beweis dafür, dass alle Geodätischen in der helikalen Mannigfaltigkeit  $M$  Normalschnitte sind.

Wir zeigen dann, dass Jacobifelder längs  $\gamma$  von der Form  $\vec{J}(t) = A\gamma(t) + b$  mit  $A \in \mathfrak{so}(N)$  und  $b \in \mathbb{R}^N$  sind. Die Matrix  $\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$  erfüllt das lineare Gleichungssystem

$$\left\langle e^{-t \begin{pmatrix} X & \xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{t \begin{pmatrix} X & \xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \equiv \text{konst. für alle } t \in \mathbb{R}. \quad (\star)$$

Sind  $J_1, J_2$  zwei Jacobifelder längs  $\gamma$  gegeben durch  $\vec{J}_i(t) = A_i\gamma(t) + b_i$ , ist auch  $\begin{pmatrix} [A_1, A_2] & A_1b_2 - A_2b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  eine Lösung von  $(\star)$ . Der Lösungsraum von  $(\star)$  wird bestimmt durch einen  $\text{ad}X$ -invarianten Teilraum von  $\mathfrak{so}(N)$  und die Eigenwerte von  $X$  und  $\text{ad}X$ .

Sind  $\vec{J}_1, \dots, \vec{J}_n$  orthogonale Jacobifelder längs  $\gamma$ , so heißt die matrixwertige Funktion  $\mathcal{Y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times n}$ ,  $t \mapsto \mathcal{Y}(t) = (\vec{J}_1(t), \dots, \vec{J}_n(t))$  Jacobitensor. Es gilt  $(\mathcal{Y}'(t))^T \mathcal{Y}(t) - (\mathcal{Y}(t))^T \mathcal{Y}'(t) \equiv \text{konst.}$  Ist  $\text{konst} = 0$ , so heißt  $\mathcal{Y}$  Lagrangetensor. Auf einem Intervall  $I$  sei  $\det((\mathcal{Y}(t))^T \mathcal{Y}(t)) \neq 0$  und  $t_0 \in I$ . Ferner existieren für jeden beliebigen Jacobitensor  $\mathcal{Z}$  geeignete Matrizen  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , so dass  $\mathcal{Z}(t) = \mathcal{Y}(t) \left( \int_{t_0}^t ((\mathcal{Y}(s))^T \mathcal{Y}(s))^{-1} ds C_2 + C_1 \right)$  für alle  $t \in I$  gilt. Wir zeigen, dass es einen Lagrangetensor gibt, der Folgendes erfüllt:

- (i) Es ist  $\det((\mathcal{Y}(t))^T \mathcal{Y}(t)) = C z^{-l} \prod_{\nu=1}^d (z - z_\nu)^2 \big|_{z=e^{it}}$  mit paarweise verschiedenen Nullstellen  $z_1, \dots, z_d \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .
- (ii) Es ist  $((\mathcal{Y}(t))^T \mathcal{Y}(t))^{-1} = -iz \sum_{\nu=1}^d \frac{z_\nu w_\nu w_\nu^T}{(z - z_\nu)^2} \big|_{z=e^{it}}$  mit Vektoren  $w_\nu \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ .
- (iii) Ist  $z_\nu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  eine solche Nullstelle, dann ist auch  $z_\mu := \frac{1}{z_\nu}$  eine solche. Ferner gilt  $w_\mu = \pm w_\nu$ .

Ist  $n = \dim(M) = 2$  und  $\mathcal{Y}(0) := 0$ , so zeigen wir, dass  $((\mathcal{Y}(t))^T \mathcal{Y}(t)) = (c \sin(\frac{d}{2}t))^2$  und  $d \in \{1; 2\}$  gilt. Dies führt zu einem neuen Beweis für Nikolayevskys Satz [Nik00], dass eine Fläche  $M \subset \mathbb{R}^N$  mit einfachen Geodätischen, d.h. deren Geodätische Schraubenlinien sind, konstante nicht negative Gaußkrümmung trägt.





## Abstract

A curve  $c$  in  $\mathbb{R}^N$  is a screw line, iff all its Frenet curvatures are constant. With suitable  $X \in \mathfrak{so}(N)$  and  $\xi_0 \in \text{Kern}(X), \xi_1 \in \text{Bild}(X)$  it is  $c(t) = t\xi_0 + e^{tX}\xi_1 - \xi_1 + c(0)$ . Let  $M \subset \mathbb{R}^N$  be an  $n$ -dimensional, complete, connected submanifold and  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  a geodesic in  $M$ . Then  $M$  is called helical manifold, iff all geodesics are screw lines of the same Frenet curvatures. It is known that a helical manifold is either an affine subvector-space or a Blaschke manifold, compare Sakamoto [Sak86b]. Further a submanifold is helical, iff each geodesic is a normal section in each point, see Verheyen [VC84]. First we give a new proof that in a helical manifold all geodesics are normal sections in each point.

Then we show that Jacobi fields along  $\gamma$  can be written as  $\vec{J}(t) = A\gamma(t) + b$  with suitable  $A \in \mathfrak{so}(N)$  and  $b \in \mathbb{R}^N$ . The matrix  $\left(\begin{smallmatrix} A & b \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$  solves the following system of linear equations

$$\left\langle e^{-t\left(\begin{smallmatrix} X & \xi \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)} \left(\begin{smallmatrix} A & b \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) e^{t\left(\begin{smallmatrix} X & \xi \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \equiv \text{const. for all } t \in \mathbb{R}. \quad (\star)$$

If  $J_1, J_2$  are two Jacobi fields along  $\gamma$  with  $\vec{J}_i(t) = A_i\gamma(t) + b_i$ , then  $\left(\begin{smallmatrix} [A_1, A_2] & A_1b_2 - A_2b_1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$  also is a solution of  $(\star)$ . The space of solutions of  $(\star)$  is defined in terms of an  $\text{ad}X$ -invariant subspace of  $\mathfrak{so}(N)$  and the eigenvalues of  $X$  and  $\text{ad}X$ .

Let  $\vec{J}_1, \dots, \vec{J}_n$  be orthogonal Jacobi fields along  $\gamma$ . Then the matrix valued function  $\mathcal{Y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times n}, t \mapsto \mathcal{Y}(t) = (\vec{J}_1(t), \dots, \vec{J}_n(t))$  is called Jacobi tensor. It holds  $(\mathcal{Y}'(t))^T \mathcal{Y}(t) - (\mathcal{Y}(t))^T \mathcal{Y}'(t) \equiv \text{const}$ . If  $\text{const} = 0$ , then  $\mathcal{Y}$  is a Lagrange tensor. Let  $\det((\mathcal{Y}(t))^T \mathcal{Y}(t)) \neq 0$  on an open interval  $I$  and  $t_0 \in I$ . Moreover let  $\mathcal{Z}$  be some Jacobi tensor. Then there exist matrices  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  so that  $\mathcal{Z}(t) = \mathcal{Y}(t) \left( \int_{t_0}^t ((\mathcal{Y}(s))^T \mathcal{Y}(s))^{-1} ds C_2 + C_1 \right)$  for all  $t \in I$ . We show that there is a Lagrange tensor that fulfills the following:

- (i) It is  $\det((\mathcal{Y}(t))^T \mathcal{Y}(t)) = Cz^{-l} \prod_{\nu=1}^d (z - z_\nu)^2 \Big|_{z=e^{it}}$  with pairwise different roots  $z_1, \dots, z_d \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .
- (ii) It holds  $((\mathcal{Y}(t))^T \mathcal{Y}(t))^{-1} = -iz \sum_{\nu=1}^d \frac{z_\nu w_\nu w_\nu^T}{(z - z_\nu)^2} \Big|_{z=e^{it}}$  with  $w_\nu \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ .
- (iii) If  $z_\nu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  is such a root, then  $z_\mu := \frac{1}{z_\nu}$  is another such root. Furthermore it holds  $w_\mu = \pm w_\nu$ .

For  $n = \dim(M) = 2$  and  $\mathcal{Y}(0) := 0$  we show that  $((\mathcal{Y}(t))^T \mathcal{Y}(t)) = (c \sin(\frac{d}{2}t))^2$  and  $d \in \{1; 2\}$ . This leads to a new proof on Nikolayevsky's theorem [Nik00] that a surface  $M \subset \mathbb{R}^N$  with simple geodesics, i.e. all geodesics are screw lines, is of non negative constant Gauß curvature.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1	Jacobifelder . . . . .	7
2.2	Jacobitensoren . . . . .	12
2.3	Euklidische Bewegungen . . . . .	16
2.4	Schraubenlinien . . . . .	18
2.5	Trigonometrisch polynomiale Vektoren . . . . .	23
2.6	Lagrangetensoren der Veroneseinbettungen . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Schraubenmannigfaltigkeiten</b>	<b>31</b>
3.1	Geodätische Normalschnitte . . . . .	34
3.2	Jacobifelder auf Schraubenmannigfaltigkeiten . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Schraubenflächen</b>	<b>49</b>
<b>5</b>	<b>Jacobitensoren in Dimension größer 2</b>	<b>55</b>
5.1	Jacobitensoren auf Schraubenmannigfaltigkeiten . . . . .	55
5.2	Die Partialbruchzerlegung . . . . .	67
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>75</b>



# 1 Einleitung

Geraden und Kreise im  $\mathbb{R}^2$  haben konstante Krümmung. Eine Frenetkurve im  $\mathbb{R}^N$ , deren Frenetkrümmungen konstant sind, heißt *Schraubenlinie*, zum Beispiel die Helix im  $\mathbb{R}^3$ . Eine Untermannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^N$  ist eine *Untermannigfaltigkeit mit einfachen Geodätischen*, wenn alle Geodätischen in  $M$  Schraubenlinien im  $\mathbb{R}^N$  sind, vgl. [Nik00].  $M$  ist eine *Schraubenmannigfaltigkeit* oder *helikale (Unter-) Mannigfaltigkeit*, wenn alle Geodätische in  $M$  kongruente Schraubenlinien sind, also die Frenetkrümmungen konstant und unabhängig von der Wahl der Geodätischen sind. Die *Ordnung* einer Schraubenmannigfaltigkeit ist die Dimension des kleinsten affinen Unterraumes, in dem eine Geodätische enthalten ist, vgl. [Sak82]. Beispiele sind Untervektorräume mit Ordnung 1 sowie Sphären und Veroneseeinbettungen mit Ordnung 2. Letztere werden in Kapitel 2.6 näher betrachtet. Die Idee einer Schraubenmannigfaltigkeit geht auf A. L. Besse zurück, vgl. [Sak82]. Er konstruiert in [Bes78] 6.99ff, wie folgt, sogenannte *Nice Imbeddings* einer streng harmonischen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  in eine Sphäre  $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^N$  um den Ursprung, deren lokal isometrische Bilder Schraubenmannigfaltigkeiten sind: Zum  $k$ -ten der Eigenwerte  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$  des Laplaceoperators auf Funktionen auf  $M$  sei  $(\varphi_1, \dots, \varphi_{N_k})$  eine Orthonormalbasis des Eigenraumes. Die  $k$ -te Standardimmersion ist dann  $\Phi_k : M \rightarrow \mathbb{S} \subset \mathbb{R}^{N_k}, p \mapsto (\varphi_1(p), \dots, \varphi_{N_k}(p))$ . Die Bilder solcher Immersionen sind ferner minimal in  $\mathbb{S}$ . Eine lokal isometrische Immersion, deren Bild eine Schraubenmannigfaltigkeit ist, heißt *helikale Immersion*. Sakamoto bezeichnet „die Theorie von helikalen Immersionen (insbesondere im minimalen Fall) [als] eine Untermannigfaltigkeitenversion harmonischer Mannigfaltigkeiten“, siehe [Sak82]. Er hofft, dass sich das Studium von Schraubenmannigfaltigkeiten als hilfreich zum Lösen der *Lichnerowiczvermutung* erweist, also dass „eine harmonische Mannigfaltigkeit entweder ein flacher oder ein lokal symmetrischer Raum vom Rang 1 ist“, siehe [Kni12]. Damek-Ricci-Räume zeigen, dass diese Vermutung im nicht kompakten Fall falsch ist. S. Szabó beweist sie für Mannigfaltigkeiten mit kompakter universeller Überlagerung 1990 in [Sza90]. Hierzu nutzt er Besses *Nice Imbeddings* und einen Satz von Allamegion, dass eine vollständige, einfach zusammenhängende, harmonische Mannigfaltigkeit diffeomorph zu einem euklidischen Raum oder eine Blaschkemannigfaltigkeit ist.

Eine Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine *Blaschkemannigfaltigkeit*, wenn ihr Injektivitätsradius gleich ihrem Durchmesser ist. Die *Blaschkevermutung* lautet, dass eine Blaschke-

mannigfaltigkeit  $M$  isometrisch zu einem kompakten symmetrischen Raum von Rang 1 ist, einem sogenannten *CROSS*. Topologisch kann man einer Blaschkemannigfaltigkeit ein CROSS als Modellraum zuweisen. Ist dieser Modellraum eine Sphäre  $\mathbb{S}^n$  oder ein reell projektiver Raum  $\mathbb{RP}^n$ , so ist die Blaschkevermutung bewiesen, vgl. [Bes78]. In den geraden Dimensionen ungleich 2 ist bisher nur wenig mehr als in [Bes78] bekannt, vgl. [SSW05]. Sakamoto zeigt, dass Schraubenmannigfaltigkeiten Blaschkemannigfaltigkeiten oder Untervektorräume sind [Sak86b] und [Sak82].

In dieser Arbeit werden wir Schraubenmannigfaltigkeiten  $M$  nahe ihrer Geodätischen untersuchen, indem wir Jacobifelder und Lagrangetensoren betrachten. Wir geben zunächst in Kapitel 3.1 einen neuen Beweis, dass eine Schraubenmannigfaltigkeit geodätische Normalschnitte hat. Dazu berechnen wir  $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} d_M(\gamma(0), \gamma(t))$  einerseits mit der ersten Variationsformel und andererseits dadurch, dass der euklidische Abstand zweier Punkte  $p, q \in M$  eine Funktion ihres intrinsischen Abstandes  $\|p - q\| = F(d_M(p, q))$  ist.

In Kapitel 3.2 geben wir eine neue Beschreibung von Jacobifeldern längs der Geodätischen  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M \subset \mathbb{R}^N$ . Da alle Geodätischen kongruente Schraubenlinien sind, ist ein Jacobifeld von der Form  $\vec{Y}(t) = A\gamma(t) + b$  mit  $A \in \mathfrak{so}(N)$  und  $b \in \mathbb{R}^N$ . Die Matrix  $\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$  löst die lineare Gleichung

$$\left\langle e^{-t \begin{pmatrix} X & \xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{t \begin{pmatrix} X & \xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \equiv \text{konstant} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen  $\begin{pmatrix} A_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  zwei Jacobifelder, so erfüllt  $\left[ \begin{pmatrix} A_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$  ebenfalls die obige lineare Gleichung. Wir werden den Lösungsraum bestimmen und weitere Bedingungen für  $\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  finden, wenn  $\vec{Y}(t) = A\gamma(t) + b$  ein Jacobifeld ist.

Ist die Schraubenmannigfaltigkeit  $M$  kompakt, so ist  $M$  eine Blaschkemannigfaltigkeit. Daher sind alle Geodätischen kongruente, einfach geschlossene Schraubenlinien im  $\mathbb{R}^N$  ohne Einschränkung der Periode  $2\pi$ . Die Darstellung  $\vec{Y}(t) = A\gamma(t) + b$  zeigt deutlich, dass ein Jacobifeld längs  $\gamma$  ein trigonometrisch polynomialer Vektor ist. Ein *Jacobitensor*  $\mathcal{Y}$  längs  $\gamma$  ist eine  $(N \times n)$ -Matrix, in deren  $n$  Spalten je ein orthogonales Jacobifeld längs  $\gamma$  steht. Dann gilt  $(\mathcal{Y}'(t))^T \mathcal{Y}(t) - (\mathcal{Y}(t))^T \mathcal{Y}'(t) \equiv \text{konst.}$  Ist diese Konstante 0, so heißt  $\mathcal{Y}$  *Lagrangetensor* längs  $\gamma$ . Es sei  $\mathcal{Y}$  ein solcher und  $(\mathcal{Y}(t))^T \mathcal{Y}(t)$  für alle  $t \in I$  invertierbar. Dann lässt sich jeder beliebige Jacobitensor  $\mathcal{Z}$  für  $t_0, t \in I$  durch

$$\mathcal{Z}(t) = \mathcal{Y}(t) \left( \int_{t_0}^t \left( (\mathcal{Y}(s))^T \mathcal{Y}(s) \right)^{-1} ds C_2 + C_1 \right)$$

mit geeigneten  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  berechnen, siehe Kapitel 2.2. Ist  $M$  eine Schraubenfläche, so entsprechen sich Jacobitensoren und Jacobifelder. Daher ist  $(\mathcal{Y}(t))^T \mathcal{Y}(t) = \|\vec{Y}(t)\|^2 = z^{-m} P(z)|_{z=e^{it}}$  ein trigonometrisches Polynom mit  $P \in \mathbb{C}[z]$  und  $\text{Grad}(P) = 2m$ . In

Kapitel 4 werden wir zeigen, dass

$$\frac{z^{m-1}}{iP(z)} = \sum_{\nu=1}^m \frac{a_\nu}{(z - z_\nu)^2}$$

mit paarweise und von 0 verschiedenen Nullstellen  $z_1, \dots, z_m \in \mathbb{C}$  von  $P$  und Konstanten  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  gilt. Hieraus werden wir unter der Voraussetzung  $\vec{Y}(0) = 0$  folgern, dass  $P(z) = C \cdot (z^m - 1)^2$  das  $m$ -te Kreisteilungspolynom ist. Folglich ist  $\|\vec{Y}(t)\| = \tilde{C}|\sin(\frac{m}{2}t)|$  sowie  $K \equiv \frac{m^2}{4\|\dot{\gamma}\|^2}$ . Dies gibt einen neuen Beweis, dass helikale Flächen konstante Krümmungen haben.

In Kapitel 5 erweitern wir diesen Ansatz auf Mannigfaltigkeiten höherer Dimensionen  $n \geq 2$ . Ein Jacobitensor  $\mathcal{Y}(t) = z^{-m}R(z)|_{z=e^{it}}$  ist eine trigonometrisch polynomiale Matrix. Wir werden zeigen, dass es einen Lagrangetensor  $\mathcal{Y}$  gibt, der Folgendes erfüllt:

- (i) Es ist  $\det \left( (R(z))^T R(z) \right) = C z^{d_0} \prod_{\nu=1}^d (z - z_\nu)^2$  mit paarweise verschiedenen Nullstellen  $z_0 = 0, z_1, \dots, z_d \in \mathbb{C}$ .
- (ii) Mit geeigneten Vektoren  $w_1, \dots, w_d \in \mathbb{C}^n$  ist die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{iz} \left( \frac{1}{z^{2m}} (R(z))^T R(z) \right)^{-1} = - \sum_{\nu=1}^d \frac{z_\nu w_\nu w_\nu^T}{(z - z_\nu)^2}.$$

- (iii) Des Weiteren gibt es für alle  $\nu \in \underline{d}$  ein  $\mu \in \underline{d}$  mit  $z_\mu = \frac{1}{z_\nu}$  und  $\overline{w_\mu} = w_\nu$ .  
Ist  $z_\nu \in \mathbb{S}^1$ , so folgt insbesondere  $w_\nu \in \mathbb{R}^n$ .

In Kapitel 5.2 werden wir diese Partialbruchzerlegung weiter untersuchen. So hat die Matrix  $\sum_{\nu=1}^d \frac{-z_\nu w_\nu w_\nu^T}{(z - z_\nu)^2}$  in  $z_0 = 0$  eine Nullstelle der Vielfachheit  $d - n$ . Die Anzahl der Nullstellen auf  $\mathbb{S}^1$  lässt sich durch  $n$  nach unten und  $2n$  nach oben beschränken. Ist  $M$  eine Blaschkemannigfaltigkeit ungleich des  $\mathbb{RP}^n$ , so ist zudem  $\det \left( \sum_{\nu=1}^d \frac{z_\nu w_\nu w_\nu^T}{z - z_\nu^2} \right) \equiv 0$ .

Es ist nicht bekannt, ob eine Schraubenmannigfaltigkeit ein *D'Atri-Raum* ist, also ein Raum, auf dem eine Abschwächung der harmonischen Bedingung gilt, vgl. [Sak86b]. Um diese Frage zu beantworten, kann es hilfreich sein, Lagrangetensoren längs Geodätischen zu beschreiben.

Im Folgenden stellen wir bekannte Aussagen über Schraubenmannigfaltigkeiten dar.

Tsukada zeigt, dass eine helikale Immersion einer streng harmonischen Mannigfaltigkeit schon eine *Nice Imbedding* ist, vgl. [Tsu83] Korollar 2.3. Des Weiteren klassifiziert er alle möglichen Immersionen  $\Phi : M \rightarrow \mathbb{S}^{N-1}$  eines kompakten, symmetrischen Raumes vom Rang 1, so dass  $\Phi(M)$  eine Schraubenmannigfaltigkeit ist und in keiner Sphäre niedrigerer Dimension liegt, auf folgende Weise: Es gibt nicht negative ganze Zahlen  $0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_l$  und positive Konstanten  $c_{k_1}, \dots, c_{k_l} \in \mathbb{R}^+$ , so dass  $\Phi$  in Termen der Standardimmersionen  $\Phi_k$  bis auf Lage im Raum von der Form

$\Phi(p) = (c_{k_1} \Phi_{k_1}(p), \dots, c_{k_l} \Phi_{k_l}(p))$  ist. Dabei bedeutet  $k_1 = 0$ , dass  $\Phi_{k_1}$  eine konstante Abbildung ist. Auf diese Weise lassen sich beliebige helikale Immersionen  $f_1, \dots, f_l$  zu einer neuen helikalen Immersion  $f$  mit  $f(p) = (c_1 f_1(p), \dots, c_l f_l(p))$  zusammensetzen.

Sakamoto berechnet in [Sak82] den Frenetrahmen einer Geodätischen  $\gamma$  in einer Schraubenmannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{M}_\kappa$  im Raum konstanter Krümmung  $\kappa$  durch höhere kovariante Ableitungen in Richtung  $\dot{\gamma}$  der zweiten Fundamentalform  $\alpha(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$  im Normalraum. Ist  $\mathbb{M}_\kappa = \mathbb{R}^N$  ein euklidischer Raum, so bedeutet dies, dass  $\gamma$  in jedem Punkt  $\gamma(t)$  ein Normalschnitt ist, also  $\{\gamma(s); s \in \mathbb{R}\} \subset M \cap \nu_{\gamma(t)} M$ . Die Umkehrung dieser Aussage beweist Verheyen in [Ver85]. In [Sak82] betrachtet Sakamoto Schraubenmannigfaltigkeiten in  $\mathbb{S}^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$ . Er nutzt den Begriff Ordnung daher auf zwei verschiedene Weisen, einerseits  $d^*$  bezüglich der Frenetkrümmungen im  $\mathbb{R}^N$  und andererseits  $d$  bezüglich derer in  $\mathbb{S}^{N-1}$ . Er zeigt, dass  $M \subset \mathbb{S}^{N-1}$  für ungerades  $d$  in einem  $d$ -dimensionalen Untervektorraum und für gerades  $d$  in einem affinen  $(d-1)$ -dimensionalen Untervektorraum liegt und dieser der kleinste  $M$  Enthaltende ist. Ferner zeigt er, dass eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $M$ , die sich als Schraubenmannigfaltigkeit in eine Sphäre  $\mathbb{S}^{N-1}$  lokal isometrisch immersieren lässt, entweder eine Blaschkemannigfaltigkeit oder diffeomorph zu  $\mathbb{R}^n$  ist — aus [Sak86b] folgt, dass  $M$  eine Blaschkemannigfaltigkeit ist. Ist eine solche Immersion ferner minimal in  $\mathbb{S}^{N-1}$ , so ist  $M$  global harmonisch. In [Sak84], [Sak85b], [Sak85a], [Sak86a] beweist Sakamoto verschiedene Aussagen über Schraubenmannigfaltigkeiten, die minimal in einer Sphäre liegen. Durch Szabós Beweis der Lichnerowiczvermutung ist jedoch bewiesen, dass solche bereits kompakte, symmetrische Räume vom Rang 1 sind.

Des Weiteren untersucht Sakamoto Schraubenmannigfaltigkeiten im  $\mathbb{R}^N$  [Sak86b]. Schraubenlinien sind genau die Kurven im  $\mathbb{R}^N$ , auf denen der euklidische Abstand zweier Punkte eine Funktion allein der Kurvenlänge zwischen diesen Punkten ist. Sakamoto beweist, dass Schraubenmannigfaltigkeiten genau die Untermannigfaltigkeiten sind, auf denen der *extrinsische*, euklidische Abstand zweier Punkte eine Funktion allein des *intrinsischen*, von der ersten Fundamentalform induzierten Abstandes ist. Ferner zeigt er, dass eine einfach zusammenhängende, vollständige Schraubenmannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^N$  entweder ein Untervektorraum oder eine Blaschkemannigfaltigkeit ist. Insbesondere gibt es keine Schraubenmannigfaltigkeiten ungerader Ordnung ungleich 1. Blaschkemannigfaltigkeiten der Dimension  $n = 2$  oder  $n$  ungerade sind Sphären oder reell projektive Räume, vgl. [Bes78] Appendix B. Mit Tsukadas Klassifikation sind in diesen Dimensionen also alle Schraubenmannigfaltigkeiten bekannt. Sakamoto wiederholt eine Vermutung von Chen-Verheyen, „dass jede [ $n$ -dimensionale] Mannigfaltigkeit mit geodätischen Normalschnitten im  $\mathbb{R}^N$  [bzw. jede Schraubenmannigfaltigkeit] eine offene Teilmenge einer affinen,  $n$ -dimensionalen Ebene ist oder [minimal (vgl. [Ver85])] in einer Sphäre im  $\mathbb{R}^N$  enthalten ist“. Er vermutet weiter, dass der Schwerpunkt von  $M$  der



Mittelpunkt einer solchen Sphäre ist. Falls  $M$  ein D'Atri-Raum ist, beweist er diese Vermutung. Gleichzeitig endet er, „es scheint schwierig zu zeigen, dass, wenn  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  eine helikale Immersion ist,  $M$  ein D'Atri-Raum ist.“ Insbesondere bedeutet dies, dass nicht bekannt ist, ob eine Schraubenmannigfaltigkeit harmonisch ist, da die definierende Bedingung an D'Atri-Räume eine Abschwächung der harmonischen ist.

Sakamotos, Tsukadas und Verheyens Beweise beruhen stark auf der erwähnten Berechnung des Frenetrahmens einer Geodätischen  $\gamma$  in  $M$  durch höhere Ableitungen der zweiten Fundamentalform in Verbindung mit den Gauß-, Mainardi-Codazzi- und Ricci-Gleichungen. In  $p \in M$  lässt sich die Exponentialabbildung durch den Frenetrahmen  $\exp_p(tv) = p + \sum_{i=1}^m f_i(t)b_i(v)$  angeben. Die Koeffizienten  $f_1, \dots, f_m$  des Frenetbeins  $b_1, \dots, b_m$  sind dabei unabhängig von der Wahl des Punktes und der Richtung  $v \in \mathbb{S}_p M$ . Ferner lässt sich die Funktion  $F$  bestimmen, so dass  $\|x - y\| = F(d_M(x, y))$  gilt. Sakamoto betrachtet Jacobifelder längs einer Geodätischen  $\gamma$  und zerlegt diese in tangentialen und normalen Anteil bezüglich des Tangentialraums an  $M$  in einem festen Punkt  $p$ . Mit Hilfe dieser Zerlegung zeigt er unter Anderem in [Sak86b], dass Schraubenmannigfaltigkeiten ungerader Ordnung ungleich 1 nicht existieren und diejenigen gerader Ordnung kompakt sind. Ferner zeigt er, dass  $F' = f_1$  gilt, was im Beweis eingeht, dass Schraubenmannigfaltigkeiten Blaschkemannigfaltigkeiten oder diffeomorph zu  $\mathbb{R}^n$  sind, vgl. [Sak82] und [Sak86b]. Ist  $M$  eine minimale Schraubenmannigfaltigkeit in  $\mathbb{S}^{N-1}$ , so lässt sich auch  $\Delta F(d_M(p, \cdot))$  für festes  $p \in M$  damit berechnen, woraus er schließt, dass minimal in  $\mathbb{S}^{N-1}$  liegende Schraubenmannigfaltigkeiten global harmonisch sind, vgl. Satz 6.5 in [Sak82].

Unabhängig zu [Sak86b] beweist Yi Hong in [Hon86], dass eine zweidimensionale Schraubenmannigfaltigkeiten der Ordnung 4 konstante Gaußkrümmung hat. Er berechnet hierzu höhere Ableitungen der zweiten Fundamentalform von einer Orthonormalbasis des Tangentialraums. Ferner beweist auch er, dass alle helikalen Immersionen eines kompakten symmetrischen Raumes von Rang 1 die von Tsukada beschriebenen Form haben. In [HQ08] zeigen er und Yong-an Qin, dass eine Mannigfaltigkeit  $M$ , die eine helikale Immersion  $f : M \rightarrow N_c$  der Ordnung 2 in eine Mannigfaltigkeit  $N_c$  mit konstanter Krümmung besitzt, eine offene Teilmenge eines symmetrischen Raumes von Rang 1 ist.

Y. Nikolayevsky betrachtet in [Nik00] kompakte Flächen mit einfachen Geodätischen. Er zeigt, dass eine solche entweder ein flacher Torus oder das Bild der  $\mathbb{S}^2$  unter einer *SG-Abbildung* ist. Eine SG-Abbildung definiert er als polynomiale Abbildung  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{N_1} \oplus \mathbb{R}^{N_2}, x \mapsto (F_e(x), F_o(x))$  mit folgenden Eigenschaften:

- (i)  $F$  bildet  $\mathbb{S}^2$  homothetisch ab, d.h. lokal isometrisch bis auf eine Konstante.
- (ii)  $F_e$  ist ein gerades Polynom derart, dass eine gerade Polynomfunktion  $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $P(0) = 0$  existiert, die  $\|F_e(x) - F_e(y)\| = P(x \times y)$  für alle  $x, y \in \mathbb{S}^2$  erfüllt.
- (iii)  $F_o$  ist ein ungerades Polynom derart, dass ein  $m \in \mathbb{N}$  und gerade, homogene

Polynomfunktionen  $S_{2m-2i} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\text{Grad}(S_{2m-2i}) = 2m - 2i$  für  $1 \leq i \leq m$  existieren, so dass  $\langle F_o(x), F_o(y) \rangle = \sum_{i=1}^m \langle x, y \rangle^{2i-1} S_{2m-2i}(x \times y)$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}^3$  gilt.

Er gibt ein Beispiel für ein solches  $F$  an, so dass  $F(\mathbb{S}^2)$  nicht helikal ist. Als Korollar seines Satzes ergibt sich, dass eine Schraubenfläche eine Sphäre oder ein reell projektiver Raum mit Standardmetrik ist. Dies ist schon bekannt, da sie eine *Wiedersehensfläche*, vgl. [Gre63], also eine zweidimensionale Blaschkemannigfaltigkeit ist. Bemerkenswert ist, dass er diese Eigenschaft nicht benötigt, sondern nur, dass  $M$  eine Fläche mit geschlossenen, einfachen Geodätischen ist. Genauer zeigt er für eine Fläche  $M$  mit einfachen Geodätischen, dass, wenn schon eine Geodätische nicht geschlossen ist,  $M$  ein flacher Torus ist und, wenn alle Geodätischen geschlossen sind, alle Jacobifelder trigonometrische Polynome sind, deren Grade beschränkt sind. Für orthogonale  $\vec{Y}, \vec{Z} \in J^\perp(\gamma)$  gilt  $\vec{Y}(t) \wedge \vec{Z}(t) \equiv 0$ . Diese Gleichung überführt Nikolayevsky in komplexe Polynome. Aus diesen schließt er, dass die Gaußkrümmung konstant ist. Im Folgenden sieht er  $M$  als Bild einer homothetischen Immersion  $f$  und zeigt, dass  $f$  eine SG-Abbildung ist. Wir geben in Kapitel 4 einen neuen Beweis für seine Aussage, dass Flächen, auf denen alle Jacobifelder durch trigonometrische Polynome gegeben sind, konstante Gaußkrümmung haben. In Kapitel 5 erweitern wir unseren Beweis auf Untermannigfaltigkeiten mit höheren Dimensionen.

## 2 Grundlagen

In diesem Kapitel sollen Grundlagen über differenzierbare Untermannigfaltigkeiten des  $N$ -dimensionalen euklidischen Raumes  $\mathbb{R}^N$  dargestellt und Schreibweisen eingeführt werden. Soweit nicht anders bemerkt, findet man diese Aussagen in den gängigen Standardwerken wie [Küh08], [Sak96] und [Spi79]. Als *natürliche Zahlen* bezeichnen wir die Menge  $\mathbb{N} := \{1; 2; 3; \dots\}$  und wir schreiben  $\underline{k} := \{1; 2; \dots; k\}$  sowie  $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $\underline{k}_0 := \underline{k} \cup \{0\}$ . Soweit es nicht anders bemerkt ist, sind alle auftretenden Funktionen (unendlich oft) differenzierbar.

### 2.1 Jacobifelder

Es seien stets  $M \subset \mathbb{R}^N$  eine  $(n + 1)$ -dimensionale, vollständige, zusammenhängende Untermannigfaltigkeit mit der ersten Fundamentalform als riemannscher Metrik. Ferner sei  $p \in M$  sowie  $f$  eine Einbettung und  $u \in U$  mit  $f(u) = p$ .

- (i) Der *Tangentialraum* in  $p$  ist definiert als  $T_p M := Df_u(\mathbb{R}^{n+1})$ .
- (ii) Der *Normalraum* in  $p$  ist definiert als  $\nu_p M := (T_p M)^\perp$ .
- (iii) Eine Funktion  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  heißt *Vektorfeld* an  $M$ . Die Menge aller Vektorfelder sei  $\mathcal{V}(M)$ . Ein Vektorfeld  $X$  heißt *tangential*, wenn  $X_p := X(p) \in T_p M$  für alle  $p \in M$  gilt. Die Menge aller tangentialen Vektorfelder an  $M$  sei  $\mathcal{V}^T(M)$ . Ein Vektorfeld  $\xi$  heißt *normal*, wenn  $\xi_p := \xi(p) \in \nu_p M$  für alle  $p \in M$  gilt. Die Menge aller normalen Vektorfelder an  $M$  sei  $\mathcal{V}^\perp(M)$ .

Der *Levi-Civita-Zusammenhang*  $\nabla$  auf  $\mathcal{V}^T(M)$  ist gegeben durch die orthogonale Projektion  $\mathbb{R}^N \ni v \mapsto v^{\text{tang}} \in T_p M$  auf  $T_p M$  der gewöhnlichen Ableitung: Es seien  $X, Y \in \mathcal{V}^T(M)$  sowie  $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  mit  $c(0) = p, \dot{c}(t) = X_p$ . Dann ist

$$\nabla_{X_p} Y = \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} Y(c(t)) \right)^{\text{tang}}. \quad (2.1)$$

Es sei nun  $c : I \rightarrow M \subset \mathbb{R}^N$  eine Kurve. Es bezeichne  $\mathcal{V}(c)$  die Menge aller Vektorfelder  $\vec{Z} : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  längs  $c$  und  $\mathcal{V}^T(c)$  die aller tangentialen. Also gilt  $\vec{Z} \in \mathcal{V}^T(c)$  genau dann, wenn  $\vec{Z}(t) \in T_{c(t)}M$  für alle  $t \in I$  ist. Die *kovariante Ableitung* eines Vektorfeldes  $\vec{Z} \in \mathcal{V}^T(c)$  ist

$$\frac{D}{dt}\vec{Z}(t) = \nabla_{\dot{c}(t)}\vec{Z} = \left(\frac{d}{dt}\vec{Z}(t)\right)^{\text{tang}}. \quad (2.2)$$

Um in der Schreibweise nicht zu verwirren, werden wir stets  $\frac{D}{dt}$  schreiben, wenn die kovariante Ableitung längs  $c$  gemeint ist, und  $\vec{Z}'(t) = \frac{d}{dt}\vec{Z}(t)$ . Für die Ableitungen von  $c$  werden wir  $\dot{c}$  und  $\ddot{c}(t) = \frac{d^2}{dt^2}c(t) \stackrel{\text{i.Allg.}}{\neq} \frac{D}{dt}\dot{c}(t)$  schreiben.

Ein Vektorfeld  $\vec{Z} \in \mathcal{V}^T(c)$  ist *parallel längs  $c$* , wenn  $\frac{D}{dt}\vec{Z}(t) \equiv 0$ . Zwei parallele Vektorfelder  $\vec{Z}, \vec{Y}$  stehen stets im selben Winkel  $\langle \vec{Z}, \vec{Y} \rangle(t) \equiv \text{konst.}$

**Definition 2.1:** Eine Kurve  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  heißt *Geodätische*, wenn  $\frac{D}{dt}\dot{\gamma}(t) \equiv 0$  gilt.

Nach dem *Satz von Hopf-Rinow* ist jede Geodätische auf ganz  $\mathbb{R}$  definierbar, da  $M$  vollständig ist. Anschaulich ist  $\gamma$  eine Geodätische, wenn die Beschleunigung  $\ddot{\gamma}$  nur senkrecht zur Untermannigfaltigkeit  $M$  wirkt. Es folgt direkt durch  $\frac{d}{dt}\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = 2\langle \frac{D}{dt}\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0$ , dass Geodätische proportional zur Bogenlänge parametrisiert sind. Da  $\frac{D}{dt}\dot{\gamma}(t) \equiv 0$  in lokalen Koordinaten zu einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen führt, existiert zu jedem Vektor  $v \in T_pM$  eine eindeutige Geodätische  $\gamma_v$  mit  $\gamma_v(0) = p$  und  $\dot{\gamma}_v(0) = v$ . Mittels der Kurvenlänge  $L(c)$  definiert

$$d^M(p, q) := \inf\{L(c); c : [a, b] \rightarrow M \text{ stückweise } C^1\text{-Kurve, } c(a) = p, c(b) = q\} \quad (2.3)$$

die *intrinsische Metrik* auf  $M$ . Aus dem *Satz von Hopf-Rinow* folgt ferner, dass sich zwei Punkte  $p, q \in M$  stets durch eine kürzeste Geodätische  $\gamma$ , d.h.  $L(\gamma) = d^M(p, q)$ , verbinden lassen.

Es sei  $c : [a, b] \rightarrow M$  eine reguläre Kurve und  $F : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M, (t, u) \mapsto c_u(t)$  eine Variation von  $c = c_0$  und  $\vec{Y} := \frac{\partial}{\partial u}\big|_{u=0}F(\cdot, u)$  das Variationsvektorfeld längs  $c$ . Dann gilt die *erste Variationsformel der Länge*

$$\frac{d}{du}\bigg|_{u=0} L(c_u) = - \int_a^b \left\langle \frac{D}{dt} \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|}, \vec{Y}(t) \right\rangle dt + \langle \dot{c}(b), \vec{Y}(b) \rangle - \langle \dot{c}(a), \vec{Y}(a) \rangle. \quad (2.4)$$

Offenbar ist (2.4) genau dann für alle Variationsvektorfelder  $\vec{Y} \in \mathcal{V}^T(c)$ , die in den Randpunkten  $\vec{Y}(a) = 0 = \vec{Y}(b)$  verschwinden, gleich null, wenn  $c$  eine Geodätische ist.

Weiter ist die *Exponentialabbildung* definiert durch

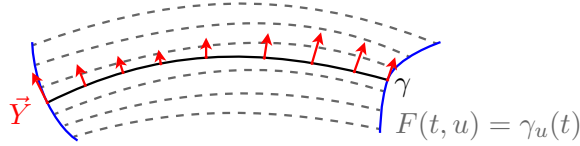
$$\exp_p : T_pM \rightarrow M, v \mapsto \gamma_v(1) = \gamma_{\frac{v}{\|v\|}}(\|v\|), \quad (2.5)$$

die wegen  $d(\exp_p)_0(v) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \exp(tv) = \dot{\gamma}_v(0) = v$  auf einer Umgebung von  $0 \in T_p M$  ein Diffeomorphismus ist. Die Gerade  $t \mapsto tv \in T_p M$  wird also auf die nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische  $\gamma_{\frac{v}{\|v\|}}$  abgebildet. Parametrisieren wir die Einheitssphäre durch  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{S}^n \subset T_p M$ , so erhalten wir *geodätische Polarkoordinaten nahe  $p$*  durch  $f : (0, r) \times U \rightarrow M, (t, \psi) \mapsto \exp(t\Phi(\psi))$ . Die darstellende Matrix der ersten Fundamentalform bezüglich dieser Polarkoordinaten, hat nach dem *Gaußlemma* die Form

$$(g_{ij}(t, \psi))_{i,j \in \underline{n+1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G(t, \psi) \end{pmatrix}, \quad \text{mit } G(t, \psi) \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (2.6)$$

Zur  $G$  verwandte Matrizen werden wir in Kapitel 5 näher betrachten.

Es sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  eine Geodätische und  $F : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M, (t, u) \mapsto \gamma^u(t)$  eine Variation durch Geodätische, d.h. für jedes  $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  ist  $\gamma^u$  eine Geodätische in  $M$ , mit Variationenvektorfeld  $\vec{Y}$ .



Dann gilt  $\frac{D}{dt} \dot{\gamma}^u(t) \equiv 0$  und  $[\frac{\partial}{\partial t} \gamma^u(t), \frac{\partial}{\partial u} \gamma^u(t)] = \frac{D}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u} \gamma^u(t) - \frac{D}{\partial u} \dot{\gamma}^u(t) = 0$  und wir erhalten die lineare Jacobidifferentialgleichung zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} \frac{D}{dt} \vec{Y}(t) &= \frac{D}{dt} \frac{D}{\partial u} \bigg|_{u=0} \dot{\gamma}^u(t) - \frac{D}{\partial u} \bigg|_{u=0} \frac{D}{\partial t} \dot{\gamma}^u(t) - \nabla_{[\frac{\partial}{\partial t} \gamma^u(t), \frac{\partial}{\partial u} \gamma^u(t)]} \dot{\gamma}^u(t) \\ &= R_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \vec{Y}(t), \dot{\gamma}(t)) = -R_{\gamma(t)}(\vec{Y}(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)). \end{aligned}$$

**Definition 2.2:** Es sei  $\gamma : I \rightarrow M, t \mapsto \gamma(t)$  eine Geodätische. Ein Vektorfeld  $\vec{Y} \in \mathcal{V}^T(\gamma)$  längs  $\gamma$  heißt *Jacobifeld*, wenn für alle  $t \in I$  gilt

$$\frac{D^2}{dt^2} \vec{Y}(t) = -R_{\gamma(t)}(\vec{Y}(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)).$$

Der Raum aller Jacobifelder  $\vec{J}(\gamma)$  ist ein reeller Vektorraum der Dimension  $2n + 2$ .

Jacobifelder sind genau die Variationsvektorfelder zu Variationen von  $\gamma$  durch Geodätische.

**Proposition 2.3** (vgl. [Bes78], App. B): Zwei Jacobifelder  $\vec{Z}, \vec{Y} \in \vec{J}(\gamma)$  erfüllen die Wronskibedingung

$$\langle \vec{Y}'(t), \vec{Z}(t) \rangle - \langle \vec{Y}(t), \vec{Z}'(t) \rangle \equiv \text{konst.}$$

*Beweis:* Es gilt mit den Symmetrien des riemannschen Krümmungstensors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \langle \vec{Y}'(t), \vec{Z}(t) \rangle - \langle \vec{Y}(t), \vec{Z}'(t) \rangle \right) &= \frac{d}{dt} \left( \left\langle \frac{D}{dt} \vec{Y}(t), \vec{Z}(t) \right\rangle - \left\langle \vec{Y}(t), \frac{d}{dt} \vec{Z}(t) \right\rangle \right) \\ &= \left\langle \frac{D^2}{dt^2} \vec{Y}(t), \vec{Z}(t) \right\rangle - \left\langle \vec{Y}(t), \frac{D^2}{dt^2} \vec{Z}(t) \right\rangle \\ &= -\langle R_{\gamma(t)}(\vec{Y}(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)), \vec{Z}(t) \rangle + \langle \vec{Y}(t), R_{\gamma(t)}(\vec{Z}(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) \rangle = 0. \end{aligned}$$

□

Für  $\vec{Y} \in J(\gamma)$  berechnen wir

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle \vec{Y}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle \stackrel{\frac{D}{dt} \dot{\gamma}(t)=0}{=} \left\langle \frac{D^2}{dt^2} \vec{Y}(t), \dot{\gamma}(t) \right\rangle = \left\langle \frac{D^2}{dt^2} \vec{Y}(t) + R_{\gamma(t)}(\vec{Y}(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)), \dot{\gamma}(t) \right\rangle \equiv 0.$$

Also ist  $\langle \vec{Y}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = mt + c$  eine lineare Funktion. Ferner ist  $t \mapsto (mt + c) \dot{\gamma}(t)$  ein Jacobifeld. Daher erhalten wir durch  $\vec{Y}(t) = (mt + c) \dot{\gamma}(t) + \vec{Y}^\perp(t)$  eine Zerlegung in Jacobifelder. Wir definieren zu gegebenem  $t_0 \in I$

$$J^T(\gamma) := \{t \mapsto (mt + c) \dot{\gamma}(t); m, c \in \mathbb{R}\} \quad (2.7a)$$

den Raum der tangentialen Jacobifelder längs  $\gamma$  und

$$\begin{aligned} J_0^\perp(\gamma) &:= \{\vec{Y} \in J(\gamma); \vec{Y}(t_0) = 0 \wedge \langle \vec{Y}'(t_0), \dot{\gamma}(t_0) \rangle = 0\}, \\ J_1^\perp(\gamma) &:= \{\vec{Y} \in J(\gamma); \langle \vec{Y}(t_0), \dot{\gamma}(t_0) \rangle = 0 \wedge \frac{D}{dt} \vec{Y}(t_0) = 0\} \end{aligned} \quad (2.7b)$$

die Räume der orthogonalen Jacobifelder längs  $\gamma$  und bemerken mit  $\dim(M) = n + 1$

$$\begin{aligned} J(\gamma) &= J^T(\gamma) \oplus J_0^\perp(\gamma) \oplus J_1^\perp(\gamma), \\ \langle \vec{Y}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle &\equiv 0 \quad \text{für alle } \vec{Y} \in J_0^\perp(\gamma) \oplus J_1^\perp(\gamma) \\ \text{sowie } \dim J^T(\gamma) &= 2 \quad \text{und} \quad \dim J_0^\perp(\gamma) = \dim J_1^\perp(\gamma) = n. \end{aligned} \quad (2.7c)$$

Aus den Symmetrieeigenschaften des Krümmungstensors schließen wir, dass die tangentialen Jacobifelder keine Aussage über die Schnittkrümmung geben. Daher genügt es, die Orthogonalen zu betrachten. Ferner ist ein Jacobifeld genau dann orthogonal, wenn es in zwei verschiedenen Punkten orthogonal ist.

**Proposition 2.4** (vgl. [Bär10]): *Es sei  $M \subset \mathbb{R}^N$  eine Fläche und  $\gamma : I \rightarrow M$  eine Geodätische in  $M$  mit Geschwindigkeit  $c \equiv \|\dot{\gamma}(t)\|$ , ferner sei  $\vec{Y} \in J^\perp(\gamma)$  ein orthogonales Jacobifeld. Dann ist die Gaußkrümmung für alle  $t \in I$  mit  $\vec{Y}(t) \neq 0$*

$$K(\gamma(t)) = -\frac{\|\vec{Y}\|''(t)}{c^2 \|\vec{Y}\|(t)} = \frac{-1}{c^2} \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\langle \vec{Y}, \vec{Y}' \rangle}{\|\vec{Y}\|^2}(t) \right) + \frac{\langle \vec{Y}, \vec{Y}' \rangle^2}{\|\vec{Y}\|^4}(t) \right).$$

**Beweis:** Es seien  $\vec{E} \in \mathcal{V}^T(\gamma)$  ein paralleles Einheitsnormalenfeld und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(t) = \langle \vec{Y}(t), \vec{E}(t) \rangle$ , also  $\vec{Y}(t) = f(t)\vec{E}(t)$  und  $f(t) = \|\vec{Y}(t)\|$ . Dann gilt

$$0 = \left\langle \frac{D^2}{dt^2} \vec{Y}(t) + R_{\gamma(t)}(\vec{Y}(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)), \vec{E}(t) \right\rangle = f''(t) + c^2 \cdot f(t) \cdot K(\gamma(t)).$$

Ferner gilt  $\frac{f''(t)}{f(t)} = \frac{\frac{d}{dt} \frac{\langle \vec{Y}, \vec{Y}' \rangle}{\|\vec{Y}\|}(t)}{f(t)} = \frac{\left( \langle \vec{Y}, \vec{Y}' \rangle' \|\vec{Y}\| - \frac{\langle \vec{Y}, \vec{Y}' \rangle^2}{\|\vec{Y}\|} \right)(t)}{(f(t))^3} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\langle \vec{Y}, \vec{Y}' \rangle}{\|\vec{Y}\|^2}(t) \right) + \left( \frac{\langle \vec{Y}', \vec{Y}' \rangle}{\|\vec{Y}\|^2}(t) \right)^2$ .  $\square$

**Definition 2.5:** Es sei  $\gamma : I \rightarrow M$  eine Geodätische. Zwei Punkte  $\gamma(a), \gamma(b)$  mit  $a \neq b \in I$  heißen (zueinander) längs  $\gamma$  konjugiert, wenn es ein Jacobifeld  $\vec{Y} \in J(\gamma)$  gibt, das in  $a$  und  $b$  verschwindet:  $\vec{Y}(a) = \vec{Y}(b) = 0$ .

Ein solches  $\vec{Y} \in J(\gamma)$  ist orthogonal  $\vec{Y} \in J^\perp(\gamma)$ . Die *Schnittfunktion*

$$\mu : \mathbb{S}M \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}, v \mapsto \sup \{t \in \mathbb{R}; d^M(\gamma_v(0), \gamma_v(t)) = t\}$$

ist stetig und es gilt mindestens eine der folgenden Eigenschaften:

- (i)  $\gamma_v(\mu(v))$  ist der erste zu  $p = \gamma_v(0)$  längs  $\gamma$  konjugierte Punkt.
- (ii) Es gibt eine von  $\gamma_v|_{[0, \mu(v)]}$  verschiedene Kürzeste von  $p$  nach  $\gamma_v(\mu(v))$ .

Der *Schnittort* von  $p \in M$  ist die Menge

$$\text{Cut}(p) := \{ \exp_p(\mu(v)v); v \in \mathbb{S}_p M \text{ mit } \mu(v) < \infty \}. \quad (2.8)$$

**Definition 2.6** (vgl. [Bes78]): Eine Mannigfaltigkeit  $M$ , auf der für jedes  $p \in M$  der Schnittort  $\text{Cut}(p)$  konstanten Abstand von  $p$  hat, also  $\mu|_{\mathbb{S}_p M}$  konstant ist, heißt *Blaschkemannigfaltigkeit*.

Anschaulich liegt der Schnittort  $\text{Cut}(p)$  dann auf einer geodätischen Sphäre um  $p$ . Der *Injektivitätsradius* in  $p$  ist definiert als  $\text{inj}(p) := \inf \{ \mu(v); v \in \mathbb{S}_p M \} > 0$ . Blaschkemannigfaltigkeiten sind genau die Mannigfaltigkeiten, auf denen der Injektivitätsradius  $\text{inj}(p)(M) := \inf \{ \text{inj}(p)(p); p \in M \}$  gleich dem Durchmesser ist. Ferner ist jede Geodätische einfach geschlossen und von gleicher Länge. Nach einem Satz von Bott-Samelson ist eine Blaschkemannigfaltigkeit diffeomorph zu  $\mathbb{S}^n$  oder  $\mathbb{R}P^n$  oder einfach zusammenhängend und hat den Homotopietyp von  $\mathbb{C}P^n$  oder den ganzzahligen Kohomologiering von  $\mathbb{H}P^n$  oder  $\mathbb{C}aP^2$ , vgl. [Bes78] 5.57 und 7.23. Beachtenswert ist, dass „diese Definition keine Bedingung an Krümmung“ enthält, siehe [SSW05]. Shankar, Spatzier und Wilking verweisen ebenda „für eine ausgezeichnete und ziemlich vollständige Abhandlung über Blaschkemannigfaltigkeiten“ auf A.L. Besse [Bes78].

**Vermutung 2.7** (Blaschkevermutung):

Eine Blaschkemannigfaltigkeit ist isometrisch zu einem CROSS.

L. Green bewies die ursprüngliche Blaschkevermutung für Flächen in einem schönen Artikel *Auf Wiedersehensflächen* [Gre63]. In [Bes78] Appendix D beweist M. Berger die Blaschkevermutung für den Fall, dass die zugrundeliegende Mannigfaltigkeit eine Sphäre oder ein reell projektiver Raum ist. Insbesondere folgt:

**Satz 2.8:** *Es sei  $M$  eine Blaschkemannigfaltigkeit der Dimension  $n$ . Ist  $n = 2$  oder  $n$  ungerade, so ist  $M$  isometrisch zu einer Sphäre  $\mathbb{S}^n$  oder einem reell projektiven Raum  $\mathbb{RP}^n$  mit kanonischer Metrik.*

## 2.2 Jacobitensoren

Wir wiederholen hier bekannte Aussagen über Jacobi- und Lagrangetensoren, formulieren diese jedoch in für Untermannigfaltigkeiten geeigneten Termen. Man findet sie unter anderem in [EO76], [Kni12] oder [BE81]. Es seien weiterhin  $M \subset \mathbb{R}^N$  eine  $(n+1)$ -dimensionale, vollständige Untermannigfaltigkeit und  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  eine Geodätische.

**Definition 2.9:** Es seien  $\vec{Y}_1, \dots, \vec{Y}_n \in J^\perp(\gamma)$  orthogonale Jacobifelder. Dann heißt  $\mathcal{Y} := (\vec{Y}_1, \dots, \vec{Y}_n)$  *Jacobitensor längs  $\gamma$*  und es ist  $\mathcal{Y}(t) = (\vec{Y}_1(t), \dots, \vec{Y}_n(t)) \in \mathbb{R}^{N \times n}$  für  $t \in \mathbb{R}$ . Wegen der Wronskibedingung 2.3 ist  $t \mapsto (\mathcal{Y}'(t))^T \mathcal{Y}(t) - (\mathcal{Y}(t))^T \mathcal{Y}'(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  konstant. Wenn

$$(\mathcal{Y}'(t))^T \mathcal{Y}(t) - (\mathcal{Y}(t))^T \mathcal{Y}'(t) \equiv 0$$

gilt, nennen wir  $\mathcal{Y}$  *Lagrangetensor längs  $\gamma$* .

**Bemerkung 2.10:** (i) Auf einer abstrakten Mannigfaltigkeit lassen sich Jacobitensoren so nicht definieren. Es sei  $N(t) := T_{\gamma(t)}M \cap (\text{Span}(\dot{\gamma}(t)))^\perp$  der Senkrechttraum von  $\dot{\gamma}(t)$ . Man definiert einen Jacobitensor  $U$  längs  $\gamma$  mit  $U(t) \in \text{End}(N_t)$  derart, dass für jedes parallele Vektorfeld  $\vec{E} \in \mathcal{V}^T(\gamma)$  das Vektorfeld  $t \mapsto U(t)\vec{E}(t)$  ein Jacobifeld ist.

(ii) Der Name *Lagrangetensor* rührt von einem  $n$ -dimensionalen Lagrangeuntervektorraum her, den die Spalten eines Lagrangetensors aufspannen:

Das Tangentialbündel  $TM$  ist eine  $(2n+2)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Es seien  $v \in TM$  und  $\gamma$  die Geodätische  $\gamma(t) = \exp(tv)$  sowie  $w \in T_v TM$ . Ferner sei  $\beta_w : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow TM$  eine Kurve mit  $\beta_w(0) = v$  und  $\beta'_w(0) = w$ . Identifizieren wir  $\tilde{v} \in TM$  mit der Geodätischen  $\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(t\tilde{v}) \in M$ , so wird  $\beta$  zur Variation



$F_w(u, t) := \exp(t\beta_w(u))$  von  $\gamma$  durch Geodätische. Durch Ableiten identifizieren wir  $w$  mit dem Jacobifeld  $\vec{Y}_w := \frac{\partial}{\partial u}|_{u=0} F_w(u, \cdot)$  als  $w = (\vec{Y}_w(0), \frac{D}{dt}\vec{Y}_w(0)) \in T_{\gamma(0)}M \oplus T_{\gamma(0)}M \cong T_v TM$ . So erhalten wir die symplektische Struktur

$$\omega_v : T_v TM \times T_v TM \rightarrow \mathbb{R}, (w_1, w_2) \mapsto \langle \vec{Y}_{w_1}(0), \vec{Y}'_{w_2}(0) \rangle - \langle \vec{Y}'_{w_1}(0), \vec{Y}_{w_2}(0) \rangle.$$

Die symplektische Struktur  $v \mapsto \omega_v$  auf  $TM$  ist invariant unter dem Geodätischen Fluß, da die rechte Seite nach der Wronskibedingung 2.3 unabhängig vom eingesetzten Parameter ist, vergleiche [Sak96].

Nun ist  $V := \{w \in T_v TM; \vec{Y}_w \in J^\perp(\gamma)\}$  ein  $2n$ -dimensionaler Untervektorraum. Ein  $n$ -dimensionaler Unterraum  $W := \text{Span}\{w_1, \dots, w_n\} \leq V$  ist genau dann ein Lagrangeunterraum von  $V$ , also  $\omega|_{W \times W} = 0$ , wenn  $(\vec{Y}_{w_1}, \dots, \vec{Y}_{w_n})$  ein Lagrange-tensor ist.

Es seien  $\vec{E}_1, \dots, \vec{E}_n \in \mathcal{V}^T(\gamma)$  parallele, orthogonale Vektorfelder längs  $\gamma$ , so dass die Vektoren  $\frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|}(t), \vec{E}_1(t), \dots, \vec{E}_n(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  eine Orthonormalbasis von  $T_{\gamma(t)}M$  bilden. Zu jedem Jacobitensor  $\mathcal{Y}$  finden wir eine Funktion  $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ , so dass

$$\mathcal{Y}(t) = (\vec{E}_1(t), \dots, \vec{E}_n(t)) \cdot U(t) \quad (2.9)$$

gilt. Wir definieren

$$G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, G(t) := (\mathcal{Y}(t))^T \mathcal{Y}(t). \quad (2.10)$$

Wegen  $\det(G(t)) = (\det(U(t)))^2$  ist  $G(t)$  genau dann invertierbar, wenn auch  $U(t)$  invertierbar ist – mit anderen Worten, wenn die  $\vec{Y}_i(t)$  linear unabhängig sind.

**Bemerkung 2.11:** Für  $v \in \mathbb{R}^n$  und  $t \in \mathbb{R}$  ist  $v^T G(t) v = (\mathcal{Y}(t)v)^T \mathcal{Y}(t)v = \|\mathcal{Y}(t)v\|^2 \geq 0$ . Also ist  $G(t)$  symmetrisch und positiv semidefinit.

Ab sofort sei  $\mathcal{Y}$  stets ein solcher Lagrangetensor längs  $\gamma$ , dass es ein Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  gibt, so dass  $G(t)$  für alle  $t \in I$  invertierbar ist. Einen solchen finden wir, wenn wir  $\vec{Y}_1, \dots, \vec{Y}_n \in J_0^\perp(\gamma)$  so wählen, dass die Vektoren  $\frac{D\vec{Y}_1}{dt}(0), \dots, \frac{D\vec{Y}_n}{dt}(0)$  eine Orthonormalbasis bilden. In diesem Fall ist  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G(t) \end{pmatrix}$  die Gramsche Matrix der ersten Fundamentaltform geodätischer Polarkoordinaten von  $M$  längs  $\gamma$ , vgl. (2.6). Wir zeigen nun, dass sich aus  $\mathcal{Y}$  auf  $I$  alle Jacobitensoren ermitteln lassen, siehe Satz 2.12.

Sei  $t \in I$ . Wir setzen  $S(t) := (U(t))^{-1} U'(t)$  und sehen  $\frac{d}{dt}(U(t))^{-1} = -S(t)(U(t))^{-1}$ . Da die  $\vec{E}_i$  parallel sind, also  $0 \equiv \frac{D}{dt}\vec{E}_i(t) = \left(\frac{d}{dt}\vec{E}_i(t)\right)^{\text{tang}}$  gilt, hat

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{E}_1, \dots, \vec{E}_n)(t) &= \frac{d}{dt}(\mathcal{Y}(t)(U(t))^{-1}) = \mathcal{Y}'(t)(U(t))^{-1} + \mathcal{Y}(t)\frac{d}{dt}(U(t))^{-1} \\ &= (\mathcal{Y}'(t) - \mathcal{Y}(t)S(t)) \cdot (U(t))^{-1} \end{aligned}$$

Spalten im Normalraum  $\nu_\gamma(t)M$ . Folglich gilt für alle  $(v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$

$$(\mathcal{Y}'(t) - \mathcal{Y}(t)S(t)) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \nu_{\gamma(t)}M$$

sowie

$$\frac{D}{dt}\mathcal{Y}(t) = (\vec{E}_1, \dots, \vec{E}_n)(t)U'(t) = \mathcal{Y}(t)S(t).$$

Ferner ist für alle  $i, j \in \underline{n}$  mit dem  $j$ -ten Einheitsvektor  $e_j$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (\mathcal{Y}'(t) - \mathcal{Y}(t)S(t)) \cdot e_j, \vec{Y}_i(t) \rangle \\ &= \langle \vec{Y}_j'(t) - \sum_{k=1}^n S_{kj}(t)\vec{Y}_k(t), \vec{Y}_i(t) \rangle \\ &= \langle \vec{Y}_j'(t), \vec{Y}_i(t) \rangle - \sum_{k=1}^n S_{kj}(t)\langle \vec{Y}_k(t), \vec{Y}_i(t) \rangle. \end{aligned}$$

Da  $\mathcal{Y}$  ein Lagrangetensor ist, gilt  $\langle \vec{Y}_i'(t), \vec{Y}_j(t) \rangle = \langle \vec{Y}_i(t), \vec{Y}_j'(t) \rangle$  und folglich  $\frac{d}{dt}(\langle \vec{Y}_i, \vec{Y}_j \rangle)(t) = 2\langle \vec{Y}_i'(t), \vec{Y}_j(t) \rangle$ . Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \langle \vec{Y}_i'(t), \vec{Y}_j(t) \rangle \right)_{i,j \in \underline{n}} - \left( \sum_{k=1}^n \langle \vec{Y}_k(t), \vec{Y}_i(t) \rangle S_{kj}(t) \right)_{i,j \in \underline{n}} \\ &= \frac{1}{2}G'(t) - G(t)S(t). \end{aligned}$$

Schließlich gilt

$$S(t) = \frac{1}{2}(G(t))^{-1}G'(t).$$

Es sei nun  $\mathcal{Z} = (\vec{Z}_1, \dots, \vec{Z}_n)$  ein beliebiger weiterer Jacobitensor. Für alle  $t \in I$  sind die  $\vec{Y}_i(t)$  linear unabhängig. Daher finden wir eine differenzierbare Funktion<sup>1</sup>  $I \ni t \mapsto A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , so dass  $\mathcal{Z}(t) = \mathcal{Y}(t)A(t)$  ist. Für  $i \in \underline{n}$  gilt nun

$$\begin{aligned} -R_{\gamma(t)}(\vec{Z}_i(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) &= \frac{D^2}{dt^2}\vec{Z}_i(t) = \sum_{j=1}^n \frac{D^2}{dt^2}(A_{ji}(t)\vec{Y}_j(t)) \\ &= \sum_{k=1}^n A''_{ki}(t)\vec{Y}_k(t) + 2 \sum_{k=1}^n A'_{ki}(t)\frac{D}{dt}\vec{Y}_k(t) + \sum_{k=1}^n A_{ki}(t)\frac{D^2}{dt^2}\vec{Y}_k(t) \end{aligned}$$

sowie

$$-R_{\gamma(t)}(\vec{Z}_i(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = -\sum_{k=1}^n A_{ki}(t)R_{\gamma(t)}(\vec{Y}_k(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = \sum_{k=1}^n A_{ki}(t)\frac{D^2}{dt^2}\vec{Y}_k(t),$$

---

<sup>1</sup>Es sind  $\mathcal{Y}(t) = (\vec{E}_1, \dots, \vec{E}_n)(t)U(t)$  und  $\mathcal{Z}(t) = (\vec{E}_1, \dots, \vec{E}_n)(t)V(t)$  mit differenzierbaren Funktionen  $U, V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ . Ist  $U$  invertierbar, so ist  $\mathcal{Z}(t) = \mathcal{Y}(t)(U(t))^{-1}V(t) =: \mathcal{Y}(t)A(t)$ .

also  $0 = \sum_{k=1}^n A''_{ki}(t) \vec{Y}_k(t) + 2 \sum_{k=1}^n A'_{ki}(t) \frac{D\vec{Y}_k}{dt}(t)$ . Ein weiteres  $j \in \underline{n}$  erfüllt nun

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \sum_{k=1}^n A''_{ki}(t) \vec{Y}_k(t) + 2 \sum_{k=1}^n A'_{ki}(t) \frac{D\vec{Y}_k}{dt}(t), \vec{Y}_j(t) \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \langle \vec{Y}_j(t), \vec{Y}_k(t) \rangle A''_{ki}(t) + \sum_{k=1}^n \underbrace{2 \langle \vec{Y}'_k(t), \vec{Y}_j(t) \rangle}_{\stackrel{\text{s.o.}}{=} \frac{d}{dt} \langle \vec{Y}_j(t), \vec{Y}_k(t) \rangle} A'_{ki}(t). \end{aligned}$$

Wir erhalten  $0 = G(t)A''(t) + G'(t)A'(t) = \frac{d}{dt}(G(t)A'(t))$ . Mit den Integrationskonstanten  $t_0 \in I, C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist  $A'(t) = (G(t))^{-1}C_2$  sowie  $A(t) = \int_{t_0}^t (G(s))^{-1}ds \cdot C_2 + C_1$ . Schließlich folgt:

**Satz 2.12** (vgl. Appendix 2 in [Kni12] oder [EO76,EO80]): *Es sei  $\mathcal{Y}$  ein Lagrangetensor längs  $\gamma$ , derart, dass auf einem Intervall  $I$  die  $(n \times n)$ -Matrix  $G(t) := (\mathcal{Y}(t))^T \mathcal{Y}(t)$  invertierbar ist, und sei  $t_0 \in I$ . Dann lässt sich auf  $I$  jeder Jacobitensor  $\mathcal{Z}$  mittels zweier konstanter Matrizen  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  darstellen als*

$$\mathcal{Z}(t) = \mathcal{Y}(t) \cdot \left( \int_{t_0}^t (G(s))^{-1} ds \cdot C_2 + C_1 \right).$$

*Je zwei Matrizen  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  definieren einen Jacobitensor.*

**Bemerkung 2.13:** Die Menge aller Jacobitensoren längs  $\gamma$  bildet offensichtlich einen Vektorraum der Dimension  $2n^2$ , denn in jeder der  $n$  Spalten steht ein Jacobifeld aus dem  $2n$ -dim. Vektorraum  $J^\perp(\gamma)$ . Satz 2.12 gibt uns also einen Vektorraumisomorphismus zwischen  $\mathbb{R}^{n \times n} \oplus \mathbb{R}^{n \times n}$  und dem Vektorraum aller Jacobitensoren längs  $\gamma$ .

**Proposition 2.14:** *Ein so gewonnener Jacobitensor  $\mathcal{Z}$  ist genau dann ein Lagrangetensor, wenn  $C_1^T C_2$  symmetrisch ist.*

**Beweis:** Es sei  $\mathcal{Z}$  ein Jacobitensor und  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  wie oben. Für alle  $t \in I$  setzen wir  $K(t) := \left( \int_{t_0}^t (G(s))^{-1} ds \cdot C_2 + C_1 \right)$ . Es ist  $K(t_0) = C_1$  und  $K'(t_0) = (G(t_0))^{-1}C_2$  sowie

$$\begin{aligned} \text{konstant} &\equiv (\mathcal{Z}'(t))^T \mathcal{Z}(t) - (\mathcal{Z}(t))^T \mathcal{Z}'(t) \\ &= (\mathcal{Z}'(t_0))^T \mathcal{Z}(t_0) - (\mathcal{Z}(t_0))^T \mathcal{Z}'(t_0) \\ &= \left( (K'(t_0))^T (\mathcal{Y}(t_0))^T + (K(t_0))^T (\mathcal{Y}'(t_0))^T \right) \cdot \mathcal{Y}(t_0) K(t_0) \\ &\quad - (K(t_0))^T (\mathcal{Y}(t_0))^T \cdot (\mathcal{Y}'(t_0) K(t_0) + \mathcal{Y}(t_0) K'(t_0)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (K(t_0))^T \underbrace{\left( (\mathcal{Y}'(t_0))^T \mathcal{Y}(t_0) - \mathcal{Y}(t_0)^T \mathcal{Y}'(t_0) \right)}_{=0, \text{ da } \mathcal{Y} \text{ ein Lagrangetensor ist.}} K(t_0) \\
&\quad + C_2^T ((G(t_0))^{-1})^T \cdot (\mathcal{Y}(t_0))^T \mathcal{Y}(t_0) C_1 - C_1^T (\mathcal{Y}(t_0))^T \mathcal{Y}(t_0) (G(t_0))^{-1} C_2 \\
&= C_2^T C_1 - C_1^T C_2.
\end{aligned}$$

Also ist  $\mathcal{Z}$  genau dann ein Lagrangetensor, wenn  $0 = C_2^T C_1 - C_1^T C_2$  gilt.

□

## 2.3 Euklidische Bewegungen

Eine Untermannigfaltigkeit  $G$ , die eine Gruppenstruktur dergestalt besitzt, dass Grupp-multiplikation und -inversion differenzierbare Abbildungen sind, ist eine *Liegruppe*, vgl. hierzu [HN91]. Beispiele sind  $(\mathbb{R}^N, +)$  sowie  $(\mathbb{R}^{N \times N}, \cdot)$ . Der Tangentialraum im Einselement  $e$  der Gruppe  $\mathfrak{g}$  trägt die Struktur einer *Liealgebra*, z.B.  $T_0 \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^N$  die triviale Struktur  $[x, y] = 0$  und  $\mathfrak{gl}(N) := T_{E_{N \times N}} \mathbb{R}^{N \times N} = \mathbb{R}^{N \times N}$  den Kommutator  $[V, W] = VW - WV$ . Für uns wichtig sind die orthogonalen Matrizen  $O(N) := \{A \in \mathbb{R}^{N \times N}; A^{-1} = A^T\}$  mit  $\mathfrak{so}(N) := T_{E_{N \times N}} O(N) = \{X \in \mathbb{R}^{N \times N}; X^T = -X\}$ . Für Matrixgruppen ist die Exponentialabbildung  $\exp$  gegeben durch die gewöhnliche Matrixexponentialabbildung  $e^{tX} := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} t^\nu X^\nu$ . Auf kompakten Matrixgruppen ist sie gleich der riemannschen Exponentialabbildung  $\exp_{E_{n \times n}}$ . Zu  $X \in \mathfrak{g}$  definiert  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G, t \mapsto e^{tX}$  einen Gruppenhomomorphismus, die sogenannte *Einparameteruntergruppe* zu  $X$ . Für  $X \in \mathfrak{g}$  definieren wir die *adjungierte Darstellung*  $\text{ad}X : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, Y \mapsto \text{ad}X(Y) := [X, Y]$ . Auch  $G$  operiert auf  $\mathfrak{g}$  durch  $\text{Ad } g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, Y \mapsto gYg^{-1}$ . Es lässt sich nachrechnen, dass  $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}(\exp[tX])(Y) = \text{ad}X(Y)$  gilt.

Eine Matrix  $X \in \mathbb{R}^{N \times N}$  heißt *schiefssymmetrisch*, wenn  $X^T = -X$  bzw.  $X \in \mathfrak{so}(N)$  gilt, vgl. hierzu [Gre81]. Es zerfällt  $\mathbb{R}^N = \text{Kern}(X) \oplus \text{Bild}(X)$  in eine direkte, orthogonale Summe. Ferner gibt es eine Orthonormalbasis  $e_1^+, e_1^-, \dots, e_k^+, e_k^- \in \text{Bild}(X)$ , so dass für jedes  $j \in \underline{k}$  der Unterraum  $\text{Span}\{e_j^+, e_j^-\}$   $X$ -invariant ist. Ferner gilt  $X^2 v = -\vartheta_j^2 v$  für alle  $v \in \text{Span}\{e_j^+, e_j^-\}$ . Schließlich erweitern wir  $\{e_l^\pm; l \in \underline{k}\}$  zu einer Orthonormalbasis des  $\mathbb{R}^n$ , bezüglich welcher  $X$  eine Blockform längs der Diagonalen hat:

$$X = \left( \begin{array}{c|ccc|ccc|ccc} 0 & & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & & & & \\ \hline & & & 0 & -\vartheta_1 & & & & & & & \\ & & & \vartheta_1 & 0 & & & & & & & \\ \hline & & & & & 0 & -\vartheta_2 & & & & & \\ & & & & & \vartheta_2 & 0 & & & & & \\ \hline & & & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & & 0 & -\vartheta_k & & \\ & & & & & & & & \vartheta_k & 0 & & \end{array} \right) \quad (2.11)$$

Wir berechnen die Matrixexponentialabbildung von  $e^{tX} = \exp(tX) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} t^\nu X^\nu$  und erhalten damit eine Kurve  $c: \mathbb{R} \rightarrow SO(n), t \mapsto \exp(tX)$  bezüglich dieser Basis:

$$c(t) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \hline & \cos \vartheta_1 t & -\sin \vartheta_1 t & \\ & \sin \vartheta_1 t & \cos \vartheta_1 t & \\ \hline & & & \cos \vartheta_2 t & -\sin \vartheta_2 t \\ & & & \sin \vartheta_2 t & \cos \vartheta_2 t \\ \hline & & & & \ddots \\ & & & & & \cos \vartheta_k t & -\sin \vartheta_k t \\ & & & & & \sin \vartheta_k t & \cos \vartheta_k t \end{array} \right) \quad (2.12)$$

In kompakten Matrixgruppen mit biinvarianter Metrik ist die riemannsche Exponentialabbildung gegeben durch die Matrixexponentialabbildung. Daher sehen wir, dass solche  $c$  gerade die Geodätischen in  $SO(N)$  ab  $E_{N \times N}$  sind. Als Kurven im  $\mathbb{R}^{N \times N}$  haben sie konstante Frenetkrümmungen, vgl. (2.15).

Eine *Isometrie*  $f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^N)$  wird bestimmt durch eine Drehspiegelung  $A \in O(N)$  und eine Translation  $b \in \mathbb{R}^N$  als  $f(x) = Ax + b$ . Des Weiteren ist  $\text{Isom}(\mathbb{R}^N) \cong O(N) \ltimes \mathbb{R}^N$  isomorph zum semidirekten Produkt dieser Liegruppen. Betten wir  $\mathbb{R}^N$  als Hyperebene  $\mathbb{R}^N \times \{1\} \subset \mathbb{R}^{N+1}$  ein, so wird  $f$  zur Matrixvektormultiplikation

$$\left( \frac{f(x)}{1} \right) = \left( \frac{Ax + b}{1} \right) = \left( \frac{A}{0} \middle| \frac{b}{1} \right) \left( \frac{x}{1} \right). \quad (2.13)$$

Die Verknüpfung zweier Isometrien entspricht der Matrixmultiplikation

$$\left( \frac{A_1}{0} \middle| \frac{b_1}{1} \right) \left( \frac{A_2}{0} \middle| \frac{b_2}{1} \right) = \left( \frac{A_1 A_2}{0} \middle| \frac{b_1 + A_1 b_2}{1} \right).$$

Daher identifizieren wir  $\text{Isom}(\mathbb{R}^N) \cong \left\{ \left( \frac{A}{0} \middle| \frac{b}{1} \right); A \in O(N), b \in \mathbb{R}^N \right\} < \text{Gl}(N+1)$  mit einer Matrixgruppe und ihre Liealgebra mit

$$\text{Lie}(\text{Isom}(\mathbb{R}^N)) \cong \left\{ \left( \frac{X}{0} \middle| \frac{\xi}{0} \right); X \in \mathfrak{so}(N), \xi \in \mathbb{R}^N \right\} < \mathfrak{gl}(N+1) = \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}.$$

Es sei  $\left( \frac{X}{0} \middle| \frac{\xi}{0} \right) \in \text{Lie}(\text{Isom}(\mathbb{R}^N))$  und  $\xi = \xi_0 + X\xi_1$  mit  $\xi_0 \in \text{Kern}(X), \xi_1 \in \text{Bild}(X)$ . Die Einparameteruntergruppe in  $\text{Isom}(\mathbb{R}^N)$  ab  $E_{N \times N}$  mit Anfangsgeschwindigkeit  $\left( \frac{X}{0} \middle| \frac{\xi}{0} \right)$  ist

$$\begin{aligned} \exp \left( t \left( \frac{X}{0} \middle| \frac{\xi}{0} \right) \right) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} t^\nu \left( \frac{X}{0} \middle| \frac{\xi}{0} \right)^\nu \\ &= \left( \frac{E_{N \times N}}{0} \middle| \frac{0}{1} \right) + t \left( \frac{X}{0} \middle| \frac{\xi_0 + X\xi_1}{0} \right) + \frac{t^2}{2} \left( \frac{X^2}{0} \middle| \frac{X^2\xi_1}{0} \right) + \frac{t^3}{6} \left( \frac{X^3}{0} \middle| \frac{X^3\xi_1}{0} \right) + \dots \\ &= \left( \frac{\exp(tX)}{0} \middle| \frac{t\xi_0 + \exp(tX)\xi_1 - \xi_1}{1} \right). \end{aligned}$$

Die Bahn eines Punktes  $p = p_0 + p_1 \in \mathbb{R}^N$  mit  $p_0 \in \text{Kern}(X)$ ,  $p_1 \in \text{Bild}(X)$  unter der Wirkung dieser Einparameteruntergruppe ist

$$\exp\left(t \begin{pmatrix} X & \xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p + t\xi_0 + \exp(tX)(p_1 + \xi_1) - (p_1 + \xi_1) \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Im folgenden Kapitel werden wir zeigen, dass Kurven mit konstanten Frenetkrümmungen von dieser Form (2.14) sind.

## 2.4 Schraubenlinien

In diesem Kapitel werden Grundlagen über Kurven mit konstanten Krümmungen und zugehörige Schreibweisen gegeben. Wir verweisen auf Kapitel 2 in [Küh08], wo Schraubenlinien kurz und weitestgehend ohne Rechnungen behandelt werden. Ferner geben wir eine Charakterisierung von Schraubenlinien nach von Neumann-Schoenberg, vgl. [NS41] und [Sza90].

Eine reguläre, proportional zur Bogenlänge parametrisierte Kurve  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  heißt *Frenetkurve vom Rang  $l$* , falls  $l$  die größte Zahl ist, sodass die Vektoren  $\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dots, c^{(l)}(t)$  für alle  $t \in I$  linear unabhängig sind. Durch ein Gram-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren erhält man aus diesen Ableitungen von  $\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dots, c^{(l)}(t)$  das *Frenetbein*  $B(t) = (b_1(t), \dots, b_l(t))$  zu  $c$  in  $t$ . Es gibt Funktionen  $\kappa_1, \dots, \kappa_{l-2} : I \rightarrow \mathbb{R}^+$  und  $\kappa_{l-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass

$$B'(t) = B(t) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_1(t) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \kappa_1(t) & 0 & -\kappa_2(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \kappa_2(t) & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & -\kappa_{l-1}(t) \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \kappa_{l-1}(t) & 0 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

für alle  $t \in I$  gilt. Man nennt sie (*Frenet-*) *Krümmungen von  $c$* . Nach dem Hauptsatz der Kurventheorie bestimmen sie die Kurve  $c$  bis auf Lage im Raum eindeutig. Die Kurve  $c$  liegt in einem  $l$ -dimensionalen, affinen Teilraum des  $\mathbb{R}^N$ .

**Definition 2.15:** Eine Frenetkurve  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$  vom Rang  $l$  heißt *Schraubenlinie vom Rang  $l$* , wenn alle Frenetkrümmungen  $\kappa_1, \dots, \kappa_{l-1}$  konstant und ungleich null sind.

**Beispiel:** Die Gerade ist eine Schraubenlinie vom Grad 1. Die Kreislinie ist eine Schraubenlinie vom Grad 2 und die Helix eine vom Grad 3.

Ab sofort sei mit  $\gamma$  stets eine Schraubenlinie mit den konstanten Frenetkrümmungen  $\kappa_1, \dots, \kappa_{l-1}$  bezeichnet. Da (2.15) eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Einträgen ist, ist  $\gamma$  auf ganz  $\mathbb{R}$  definierbar. Es sei

$$\hat{X} := \left( \begin{array}{c|cccccc} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ \hline & 0 & -\kappa_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \kappa_1 & 0 & -\kappa_2 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & \kappa_2 & 0 & & & \vdots \\ & 0 & 0 & & \ddots & & 0 \\ & \vdots & & & & 0 & -\kappa_{l-1} \\ & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \kappa_{l-1} & 0 \end{array} \right) \in \mathfrak{so}(N). \quad (2.16)$$

Wir betrachten statt (2.15) das um  $N - l$  Dimensionen erweiterte Anfangswertproblem

$$B'(t) = B(t) \cdot \hat{X}, \quad B_0 = (v_1, \dots, v_{N-l}, b_1(0), \dots, b_l(0)) \in \text{SO}(N). \quad (2.17)$$

Offenbar ist  $B(t) = B_0 \exp(t\hat{X})$  die Lösung. Dabei ist die Wahl der  $v_1, \dots, v_{N-l}$  frei, die ersten  $N - l$  Spalten sind nach der Wahl von  $\hat{X}$  konstant und uns interessieren nur die letzten  $l$  Spalten. Dann gilt

$$\dot{\gamma}(t) = B_0 \exp(t\hat{X}) e_{N-l+1} = \exp(tB_0 \hat{X} B_0^{-1}) B_0 e_{N-l+1} = \exp(tB_0 \hat{X} B_0^T) b_1(0).$$

Wegen  $X := B_0 \hat{X} B_0^T \in \mathfrak{so}(N)$  können wir  $b_1(0) = \xi_0 + X\xi_1$  auf eindeutige Weise mit  $\xi_0 \in \text{Kern}(X)$  und  $\xi_1 \in \text{Bild}(X)$  schreiben und erhalten  $\dot{\gamma}(t) = \exp(tX) b_1(0) = \xi_0 + \exp(tX) X\xi_1$ . Mit  $p = \gamma(0)$  folgt dann

$$\gamma(t) = p + \int_0^t \dot{\gamma}(s) ds = p + t\xi_0 + \exp(tX)\xi_1 - \xi_1. \quad (2.18)$$

Die Bahn von  $p = p_0 + p_1 \in \text{Kern}(X) \oplus \text{Bild}(X)$  unter der Wirkung der Einparameteruntergruppe  $\exp\left(t \left( \begin{array}{c|c} X & b_1(0) - p_1 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)\right)$  ist

$$\begin{aligned} & \exp\left(t \left( \begin{array}{c|c} X & b_1(0) - p_1 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)\right) \left( \begin{array}{c} p \\ 1 \end{array} \right) \\ \stackrel{(2.14)}{=} & \left( \begin{array}{c} p + t\xi_0 + \exp(tX)(p_1 + (\xi_1 - p_1)) - (p_1 + (\xi_1 - p_1)) \\ 1 \end{array} \right) \\ = & \left( \begin{array}{c} p + t\xi_0 + \exp(tX)\xi_1 - \xi_1 \\ 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \gamma(t) \\ 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Wir stellen fest:

**Satz 2.16** (Darstellung von Schraubenlinien): *Eine Schraubenlinie  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$  ist die Bahn eines Punktes  $p = \gamma(0)$  unter einer geeigneten Einparameteruntergruppe der Isometriengruppe. Sie lässt sich daher schreiben als*

$$\vec{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N \times \{1\} \subset \mathbb{R}^{N+1}, t \mapsto \exp\left(t \cdot \begin{pmatrix} X & \xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

mit  $X \in \mathfrak{so}(N)$  und  $\xi := \xi_0 + X\xi_1 \in \text{Kern}(X) \oplus \text{Bild}(X) = \mathbb{R}^N$ .

Jede solche Bahn ist eine Schraubenlinie.

**Bemerkung 2.17:** Da Translationen der Kurve  $\gamma$  ihr Frenetbein nicht ändern, können wir zur besseren Lesbarkeit  $p = 0$  annehmen<sup>2</sup>. Ferner seien  $X$  und  $\xi = \xi_0 + X\xi_1$  im Folgenden immer in obiger Weise zur Kurve  $\gamma$  gegeben. Zudem sei  $X$  wie in der obigen Konstruktion stets vom kleinst möglichen Rang<sup>3</sup>  $\text{Rang } X = 2k \in \{l, l-1\}$ , also mit

$$\text{Bild}(X) = \text{Span}\{e^{tX}\xi_1; t \in \mathbb{R}\}.$$

$X^2$  ist symmetrisch negativ semidefinit mit den von 0 verschiedenen Eigenwerten  $0 > -\vartheta_1^2 > \dots > -\vartheta_k^2$ . Da wir  $X$  von kleinst möglichem Rang gewählt haben, sind alle Eigenräume von  $X^2$  zu den  $-\vartheta_\nu^2$  zweidimensional. Es sei  $\{e_\nu^\pm; \nu \in \underline{k}\}$  eine Orthogonalbasis von  $\text{Bild}(X)$  aus Eigenvektoren von  $X^2$ , so dass  $\xi_1 = \sum_{\nu=1}^k x_\nu e_\nu^+$  und  $Xe_\nu^+ = \vartheta_\nu e_\nu^-$  gilt. Schließlich erweitern wir sie zu einer Orthonormalbasis des  $\mathbb{R}^n$ , bezüglich welcher  $X$  eine Blockform längs der Diagonalen trägt, vgl. (2.11):

$$X = \left( \begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \hline & X_{\vartheta_1} & & & \\ & & X_{\vartheta_2} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & X_{\vartheta_k} \end{array} \right) \quad \text{mit } X_{\vartheta_\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\vartheta_\nu \\ \vartheta_\nu & 0 \end{pmatrix}$$

Mit (2.12) und (2.18) folgt

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= p + t \cdot \xi_0 + e^{tX}\xi_1 - \xi_1 = p + t \cdot \xi_0 + \sum_{l=1}^k x_l \cdot (e^{tX}e_l^+ - e_l^+) \\ &= p + t \cdot \xi_0 + \sum_{l=1}^k x_l \cdot (\cos \vartheta_l t - 1) \cdot e_l^+ + \sin \vartheta_l t \cdot e_l^- \end{aligned}$$

Es gilt  $\text{Span}\{\gamma(t) - p; t \in \mathbb{R}\} = \text{Span}\{\xi_0, \xi_1, X\xi_1, \dots, X^{2k}\xi_1\} = \text{Bild}(X) \oplus \text{Span}\{\xi_0\}$ . Des Weiteren sehen wir, dass für  $\xi_0 = 0$  die Schraubenlinie  $\gamma$  genau dann geschlossen ist, wenn die  $\vartheta_i$  linear abhängig über  $\mathbb{Q}$  sind. Sind sie es nicht, so ist  $\text{Bild}(\gamma)$  dicht in einem Torus, vgl. [Nik00].

<sup>2</sup>Nimmt man  $p = p_0 + p_1 \in \text{Kern}(X) \oplus \text{Bild}(X)$  an, so muss an vielen Stellen das  $\xi_1$  durch  $\xi_1 + p_1$  ersetzt werden.  $p_0$  ist für folgenden Rechnungen nicht relevant.

<sup>3</sup> $X$  könnte auf  $(\text{Span}\{e^{tX}\xi_1; t \in \mathbb{R}\} \oplus \text{Span}\{\xi_0\})^\perp$  beliebig aussehen. Wir fordern 0.



**Satz 2.18:** Eine Kurve  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$  ist genau dann eine Schraubenlinie, wenn es eine gerade Funktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, so dass für alle  $s, t \in \mathbb{R}$  gilt

$$\|\gamma(t) - \gamma(s)\|^2 = F(t - s).$$

Es ist dann  $F(t) = t^2 \|\xi_0\|^2 + 2 \sum_{\nu=1}^k x_\nu^2 (1 - \cos(\vartheta_\nu t))$  und  $F'(t) > 0$  für kleine  $t > 0$ .

**Beweis:** „ $\Rightarrow$ “: Es sei  $\gamma$  eine Schraubenlinie wie oben, dann gilt

$$\begin{aligned} \|\gamma(t) - \gamma(s)\|^2 &= \|p + t\xi_0 + e^{tX}\xi_1 - \xi_1 - (p + s\xi_0 + e^{sX}\xi_1 - \xi_1)\|^2 \\ &= |t - s|^2 \|\xi_0\|^2 + \|e^{tX}\xi_1 - e^{sX}\xi_1\|^2 \\ &= |t - s|^2 \|\xi_0\|^2 + 2\|\xi_1\|^2 - 2\langle e^{[t-s]X}\xi_1, \xi_1 \rangle \\ &= |t - s|^2 \|\xi_0\|^2 + 2 \sum_{l=1}^k x_l^2 (1 - \cos(\vartheta_l(t - s))). \end{aligned}$$

„ $\Leftarrow$ “: Vergleiche [Sak86b] oder [Sza90]. Es sei  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine gerade Funktion und  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$  eine Kurve, die  $\|\gamma(t) - \gamma(s)\|^2 = F(t - s)$  für alle  $s, t \in \mathbb{R}$  erfüllt. Damit ist

$$\frac{1}{2}F''(t - s) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t \partial s}F(t - s) = -\frac{\partial}{\partial t}\langle \gamma(t) - \gamma(s), -\dot{\gamma}(s) \rangle = \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(s) \rangle.$$

Insbesondere folgt  $c := \frac{1}{2}F''(0) \equiv \|\dot{\gamma}(t)\|^2$ , also dass  $\gamma$  proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist. Es sei  $b_1 := \frac{\dot{\gamma}}{\sqrt{c}}, b_2, \dots, b_l$  der Frenetrahmen von  $\gamma$ . Somit ist  $\langle b_1(t), b_1(s) \rangle = \frac{1}{2c}F''(t - s)$ . Die erste Frenetkrümmung von  $\gamma$  ist  $(\kappa_1(t))^2 = \|\kappa_1(t)b_2(t)\|^2 = \langle \dot{b}_1(t), \dot{b}_1(t) \rangle \equiv -\frac{1}{2c}F^{(4)}(0)$  konstant.

Es sei nun  $1 \leq i < l - 1$ , so dass die Frenetkrümmungen  $\kappa_1, \dots, \kappa_i$  konstant sind. Dann ist die  $i$ -te Ableitung  $b_1^{(i)}(t) = \sum_{\nu=1}^{i+1} \lambda_\nu b_\nu(t)$  eine Linearkombination derart, dass die Koeffizienten  $\lambda_\nu$  Polynome in den  $\kappa_1, \dots, \kappa_i$  sind. Außerdem sind für  $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{gerades} \\ \text{ungerades} \end{smallmatrix} \right\} i$  die  $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{ungeraden} \\ \text{geraden} \end{smallmatrix} \right\} \lambda_\nu$  gleich 0. Dann ist

$$\begin{aligned} b_1^{(i+1)}(t) &= \sum_{\nu=1}^i \lambda_\nu (-\kappa_{\nu-1} b_{\nu-1}(t) + \kappa_\nu b_{\nu+1}(t)) - \lambda_{i+1} \kappa_i b_i(t) + \lambda_{i+1} \kappa_{i+1}(t) b_{i+1}(t) \quad \text{und} \\ \frac{(-1)^{i+1}}{2} F^{(2i)}(0) &= \langle b_1^{(i+1)}(t), b_1^{(i+1)}(t) \rangle = (\lambda_{i+1})^2 (\kappa_{i+1}(t))^2 + \text{Polynom in } \kappa_1, \dots, \kappa_i. \end{aligned}$$

Folglich ist  $\kappa_{i+1}$  konstant. □

**Bemerkung 2.19:** (i) Im Beweis sehen wir, dass dies ein lokales Ergebnis ist. Es genügt also  $\|\gamma(t) - \gamma(s)\|^2 = F(t - s)$  für alle  $s, t$  mit kleinem Abstand zu fordern.

(ii) Die Krümmungen hängen nur von den  $i$ -ten Ableitungen  $F^{(i)}(0)$  ab.

- (iii) Von Neumann-Schoenberg [NS41] und Szabó [Sza90] definieren eine Schraubenlinie  $\gamma$  im Hilbertraum  $l^2$  durch diese Eigenschaft  $\|\gamma(t) - \gamma(s)\|^2 = F(|t - s|)$  für alle  $s, t \in \mathbb{R}$ . Wie in Satz 2.18 lässt sich hier genauso beweisen, dass alle Frenetkrümmungen konstant sind.
- (iv) Die Eindeutigkeit von Schraubenlinien ist im  $l^2$  im Allgemeinen nicht gegeben, vergleiche Ragozin in [Rag80]. Es sei  $(k_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{N}$ , so dass das Gleichungssystem  $-k_i x_{i+1} + x_i + k_{i-1} x_{i-1} = 0$  eine von 0 verschiedene Lösung in  $l^2$  hat. Dann existieren überabzählbar viele, paarweise nicht isometrische Frenetkurven, die auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert sind und die Folge  $(k_i)_{i \in \mathbb{N}}$  als Krümmungen haben. Zu gegebener Geschwindigkeit  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  gibt es ferner bis auf Isometrie genau zwei Kurven, deren Frenetrahmen  $U$  die Gleichheit  $U(t + s) = U(t)U(s)$  für alle  $s, t \in \mathbb{R}$  erfüllt. Als Beispiele für Krümmungen gibt Ragozin die Folgen  $(i)_{i \in \mathbb{N}}$ , die eine eindeutige Frenetkurve definieren, und eine Folge  $(\sum_{j=1}^i r^{2j-1})_{i \in \mathbb{N}}$  mit  $r > 1$ , die keine eindeutige Frenetkurve definiert.

## 2.5 Trigonometrisch polynomiale Vektoren

Ein (reelles) *trigonometrisches Polynom*  $f$  ist eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^k a_\nu \cos(\nu t) + b_\nu \sin(\nu t) \quad \text{mit } a_\nu, b_\nu \in \mathbb{R} \text{ für alle } \nu.$$

Ein (komplexes) *trigonometrisches Polynom*  $f$  ist eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$f(t) = \sum_{\nu=-k}^k c_\nu e^{i\nu t} \quad \text{mit } c_\nu \in \mathbb{C} \text{ für alle } \nu,$$

vergleiche hierzu [Kön04]. Ein komplexes trigonometrisches Polynom  $f$  genau dann ein reelles, wenn  $c_\nu = \overline{c_{-\nu}}$  gilt. Ferner ist  $f(t) = \frac{1}{z^k} \sum_{\nu=0}^{2k} c_{\nu-k} z^\nu \Big|_{z=e^{it}}$ . Komplexe trigonometrische Polynome werden also durch rationale Funktionen der Ordnung  $2k$  bestimmt, deren einziger Pol in  $z = 0$  liegt und Ordnung  $k$  hat. Ist  $f$  ein reelles trigonometrisches Polynom, so gilt  $c_\nu = \frac{a_\nu + ib_\nu}{2}$  für  $\nu \in \underline{k}$  und  $c_0 = \frac{a_0}{2}$ . Wir werden stets reelle trigonometrische Polynome betrachten und daher als *trigonometrische Polynome* bezeichnen.

Ist  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N, t \mapsto \gamma(0) + \sum_{l=1}^k x_l \cdot ([\cos \vartheta_l t - 1] \cdot e_l^+ + \sin \vartheta_l t \cdot e_l^-)$  eine geschlossene Schraubenlinie mit Periode  $2\pi$ , so sind  $\vartheta_1, \dots, \vartheta_k \in \mathbb{N}$  und die Einträge von  $\gamma$  reelle trigonometrische Polynome unterschiedlicher Grade. Somit gibt es ein vektorwertiges Polynom  $P = (P_1, \dots, P_N) \in \mathbb{C}^N[z]$  über  $\mathbb{C}$ , so dass

$$\gamma(t) = z^{-k} P(z) \Big|_{z=e^{it}} \quad (2.20)$$

und  $\max\{\text{Grad}(P_j); j \in \underline{N}\} = 2k$  gilt.

**Definition 2.20:** Es seien  $k, l \in \mathbb{N}$ ,  $U \subset \mathbb{C}$  und  $P : U \rightarrow \mathbb{C}^k$  und  $R : U \rightarrow \mathbb{C}^{k \times l}$ . Wir nennen den Vektor  $P$  bzw. die Matrix  $R$  *polynomial, holomorph, rational* oder *trigonometrisch polynomial*, wenn alle  $P_i$  bzw.  $R_{ij}$ , f.a.  $i \in \underline{k}, j \in \underline{l}$ , Polynome, holomorphe, rationale Funktionen bzw. trigonometrische Polynome sind. Im letzten Fall ist  $U = \mathbb{R}$ .

- $P$  bzw.  $R$  hat in  $\zeta \in \hat{\mathbb{C}}$  eine Nullstelle der Vielfachheit  $d$ , wenn *alle*  $P_i$  bzw.  $R_{ij}$  in  $\zeta$  eine Nullstelle der Vielfachheit  $d$  haben.
- $P$  bzw.  $R$  hat in  $\zeta \in \hat{\mathbb{C}}$  einen Pol der Ordnung  $d$ , wenn  $d$  größtmöglich ist, so dass *ein*  $P_i$  bzw.  $R_{ij}$  in  $\zeta$  einen Pol der Ordnung  $d$  hat.
- Schließlich definieren wir den Grad von  $P \in \mathbb{C}^k[z]$  bzw.  $R \in \mathbb{C}^{k \times l}[z]$  durch  $\text{Grad}(P) := \max_{i \in \underline{k}} \text{Grad}(P_i)$  bzw.  $\text{Grad}(R) := \max_{(i,j) \in \underline{k} \times \underline{l}} \text{Grad}(R_{ij})$ .

**Bemerkung 2.21:** Hat  $P$  bzw.  $R$  in  $z_0$  eine Nullstelle der Ordnung  $d$ , so können einzelne Einträge  $P_i$  bzw.  $R_{ij}$  in  $z_0$  Nullstelle höherer Ordnung haben. Hat  $P$  bzw.  $R$  in  $z_0$  einen Pol der Ordnung  $d$ , so können einzelne Einträge  $P_i$  bzw.  $R_{ij}$  in  $z_0$  keinen Pol oder Pole kleinerer Ordnung haben.

## 2.6 Lagrangetensoren der Veroneseinbettungen

Ein schönes Beispiel für Schraubenmannigfaltigkeiten sind die Veroneseinbettungen der projektiven Räume. Sie, Sphären und Untervektorräume sind genau die zusammenhängenden, vollständigen Untermannigfaltigkeiten im  $\mathbb{R}^N$  mit ebenen Geodätischen.

**Satz 2.22** (Little, siehe [Lit76]): *Es sei  $M$  eine zusammenhängende Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^N$  mit  $n := \dim(M) \geq 2$ . Falls jede Geodätische in einer zweidimensionalen Ebene liegt, dann ist  $M$  entweder eine offene Teilmenge eines  $n$ -dimensionalen affinen Untervektorraums oder kongruent zu einer Ausdehnung einer offenen Teilmenge einer Einheitssphäre  $\mathbb{S}^n$  oder eines Bildes einer Veroneseinbettung von  $\mathbb{RP}^n$ ,  $\mathbb{HP}^n$  oder  $\mathbb{CaP}^2$ .*

Nach [Lit76] konstruieren wir die Veroneseinbettung der projektiven Räume  $\mathbb{F}P^n$  für  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$  in den  $(n+1)$ -Matrizen  $\mathbb{F}^{(n+1) \times (n+1)}$  über  $\mathbb{F}$  mit Bild

$$\mathbb{F}P^n \cong \mathbb{V}_n := \left\{ A \in \mathbb{F}^{(n+1) \times (n+1)}; A = \overline{A}^T \wedge A = A^2 \wedge \text{Rang}(A) = 1 \right\}$$

und zeigen, dass die Geodätischen in einer Veroneseinbettung Kreise sind, deren Krümmung unabhängig von der Wahl der Geodätischen ist. Für  $\mathbb{F} = \mathbb{Ca}$  verweisen wir auf [Lit76]. Danach berechnen wir Lagrangetensoren längs einer solchen Geodätischen.

Die euklidischen Skalarprodukte in  $\mathbb{F}$ ,  $\mathbb{F}^{(n+1) \times (n+1)}$  und  $\mathbb{F}^{(n+1)}$  sind gegeben durch  $\langle x, y \rangle_{\mathbb{F}} := \frac{1}{2}(x\overline{y} + y\overline{x})$  und  $\langle A, B \rangle_{\mathbb{F}^{(n+1) \times (n+1)}} = \frac{1}{2} \text{Spur}(A\overline{B}^T + B\overline{A}^T)$  sowie  $\langle v, w \rangle_{\mathbb{F}^{(n+1)}} = \frac{1}{2}(\overline{w}^T v + \overline{v}^T w)$  — aus Gründen der Übersichtlichkeit lassen wir den Index am Skalarprodukt weg, wenn eindeutig ist, welches gemeint ist. Des Weiteren sei  $\mathbb{S} \subset \mathbb{F}^{n+1}$  die Einheitssphäre mit reeller Dimension  $\dim \mathbb{S} = r_{\mathbb{F}}(n+1) - 1$ , wobei  $r_{\mathbb{F}} = 1, 2$  oder  $4$  die reelle Vektorraumdimension von  $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  oder  $\mathbb{H}$  ist. Als Bahn eines Punktes unter einer isometrischen Gruppenwirkung der orthogonalen, unitären bzw. symplektischen Gruppe  $O := \left\{ Q \in \mathbb{F}^{(n+1) \times (n+1)}; Q\overline{Q}^T = E_{(n+1) \times (n+1)} \right\}$  von  $\mathbb{F}^{n+1}$ , wie wir im folgenden Abschnitt sehen werden, ist  $\mathbb{V}_n$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit  $\dim(\mathbb{V}_n) = r_{\mathbb{F}}n$ . Es sei  $A \in \mathbb{V}_n$ . Als hermitesche Matrix ist  $A = P D \overline{P}^T$  diagonalisierbar mit einer Matrix  $P \in O$ . Da  $\text{Rang}(A) = 1$  ist, hat  $D$  genau einen Eintrag ungleich 0. Folglich gibt es einen Vektor  $v \in \mathbb{F}^{n+1}$ , so dass  $A = v\overline{v}^T$  gilt. Wir definieren eine Funktion  $f : \mathbb{F}^{n+1} \rightarrow \mathbb{F}^{(n+1) \times (n+1)}, w \mapsto w\overline{w}^T$  und berechnen  $f(w)^2 = w\overline{w}^T w\overline{w}^T = (\overline{w}^T w)f(w) = \text{Spur}(f(w))f(w)$  für alle  $w \in \mathbb{F}^{n+1}$ . Wegen  $A^2 = A$  ist  $1 = \text{Spur}(A) = \|v\|^2$ . Offenbar ist  $\mathbb{V}_n = f(\mathbb{S})$ . Für jede Einheit  $x \in \mathbb{F}$  gilt  $f(v) = f(vx)$  genau dann, wenn  $x\overline{x} = \langle x, x \rangle_{\mathbb{F}} = 1$  gilt. Folglich ist  $f$  unter Rechtsmultiplikation genau unter der Einheitengruppe  $\mathbb{S}^{\mathbb{F}-1} \subset \mathbb{F}$  invariant und induziert daher eine Einbettung von  $\mathbb{F}P^n$  als  $\mathbb{V}_n$ , die *Veroneseinbettung*. Ferner gilt für  $A = v\overline{v}^T \in \mathbb{V}_n$ , dass  $\|A\|^2 := \text{Spur}(A\overline{A}^T) = \text{Spur}(v\overline{v}^T v\overline{v}^T) = \text{Spur}(v\overline{v}^T) = \|v\|^2 = 1$

und  $\langle A, E \rangle = \text{Spur}(A) = \|v\|^2 = 1$  gilt. Daher ist  $\mathbb{V}_n$  im Schnitt der Einheitskugel in  $\mathbb{F}^{(n+1) \times (n+1)}$  mit einer affinen Hyperebene senkrecht zur Einheitsmatrix enthalten. Sakamoto nennt solche Schnittsphären *small sphere*, vgl. [Sak82].

Da für eine Matrix  $P \in \text{O}$  offenbar  $f(Pv) = Pf(v)\overline{P}^T$  gilt, ist  $\mathbb{V}_n$  die Bahn einer Matrix  $A \in \mathbb{V}_n$  unter der isometrischen Gruppenwirkung  $\varrho : \text{O} \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{F}^{(n+1) \times (n+1)})$  mit  $\varrho(P)(A) := PA\overline{P}^T$  der orthogonalen, unitären bzw. symplektischen Matrizen, wie  $\mathbb{S}$  die Bahn von  $\varrho : \text{O} \rightarrow (\mathbb{F}^{(n+1)})$  mit  $\varrho(P)(v) := Pv$  ist. Die Standgruppe  $H$  von  $A$  ist isomorph zur Gruppe  $\text{O}_n \times G$ , wobei  $\text{O}_n$  die orthogonale, unitäre bzw. symplektische Gruppe des  $\mathbb{F}^n$  sei und  $G$  die Gruppe aus den  $r_{\mathbb{F}}$  Matrizen  $\sigma A$  mit  $\sigma = 1, i, j$  oder  $k$ . Da  $A^2 = A$  gilt, ist dies eine wohldefinierte Gruppe mit  $r_{\mathbb{F}}$  Elementen. Dann ist die Dimension  $\dim(\mathbb{V}_n) = \dim(\text{O}) - \dim(H) = nr_{\mathbb{F}}$ . Ferner ist  $\varrho(P)$  beide Male eine euklidische Bewegung. Es sei  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}, t \mapsto (\cos(t), \sin(t), 0, \dots, 0)^T$  ein Großkreis in  $\mathbb{S}$ , also senkrecht zur Faser  $e_1 \cdot \mathbb{S}^{r_{\mathbb{F}}-1} = \{(\tilde{v}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{S}; \tilde{v} \in \mathbb{F} \wedge \|\tilde{v}\|^2 = 1\}$ . Dann ist

$$f(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} \cos^2(t) & \cos(t)\sin(t) & & \\ \cos(t)\sin(t) & \sin^2(t) & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+\cos(2t) & \sin(2t) & & \\ \sin(2t) & 1-\cos(2t) & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

ein mit Geschwindigkeit  $\|\frac{d}{dt}f(\gamma(t))\| \equiv \sqrt{2}$  durchlaufener Kreis mit Radius  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Die Parametrisierung  $f \circ \gamma$  ist  $\pi$ -periodisch<sup>4</sup>. Wir zeigen nun, dass  $f \circ \gamma$  eine Geodätische in  $\mathbb{V}_n$  ist. Es genügt zu zeigen, dass  $\frac{d^2}{dt^2}f(\gamma(t)) \perp T_{f(\gamma(t))}\mathbb{V}_n = Df_{\gamma(t)}(T_{\gamma(t)}\mathbb{S})$  ist. Dazu wählen wir eine Basis von  $T_{\gamma(t)}\mathbb{S} = (\gamma(t))^\perp = ((\cos(t), \sin(t), 0, \dots, 0)^T)^\perp$ , wie folgt mit  $\sigma$  gleich  $i, j$  oder  $k$ , je nach  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ :

$$\begin{aligned} e_{1,\sigma}(t) &:= \sigma(\cos(t), \sin(t), 0, \dots, 0)^T \quad \text{mit } \sigma \neq 1, \\ e_{2,\sigma}(t) &:= \sigma(-\sin(t), \cos(t), 0, \dots, 0)^T \quad \text{oder} \\ e_{\nu,\sigma}(t) &:= \sigma e_\nu \quad \text{mit } \nu \geq 3. \end{aligned}$$

Es ist  $Df_{\gamma(t)}(e_{\nu,\sigma}(t)) = \gamma(t)\overline{e_{\nu,\sigma}(t)}^T + e_{\nu,\sigma}(t)\overline{\gamma(t)}^T$

$$= \begin{cases} 0, & \text{falls } \nu = 1, \\ \begin{pmatrix} -(\sigma+\overline{\sigma})\sin(t)\cos(t) & \overline{\sigma}\cos^2(t)-\sigma\sin^2(t) \\ \sigma\cos^2(t)-\overline{\sigma}\sin^2(t) & (\sigma+\overline{\sigma})\sin(t)\cos(t) \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix} & \text{falls } \nu = 2, \\ \begin{pmatrix} 0 & \overline{\sigma}\cos(t) & & \\ & \overline{\sigma}\sin(t) & & \\ & & \ddots & \\ \sigma\cos(t) & \sigma\sin(t) & & 0 \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix} & \text{falls } \nu \geq 3. \end{cases}$$

<sup>4</sup>Würde man als Skalarprodukt  $\frac{1}{4} \text{Spur}(A\overline{B}^T + B\overline{A}^T)$  nutzen, so wäre  $\|\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\| \equiv 1$ . Für  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  wäre  $f$  eine lokale Isometrie, im allgemeinen Fall eine riemannsche Submersion.

Der Mittelpunkt von  $f \circ \gamma$  sei  $p_0$ . Für  $\nu \neq 2$  ist  $\frac{d^2}{dt^2}f(\gamma(t)) = -4(f(\gamma(t)) - p_0) \perp Df_{\gamma(t)}(e_{\nu,\sigma})$  offensichtlich. Sei also  $\nu = 2$ . Zur Übersichtlichkeit schreiben wir nur die von 0 verschiedene  $(2 \times 2)$ -Matrix. Sei  $\sigma \neq 1$ , so entspricht  $Df_{\gamma(t)}(e_{2,\sigma}(t))$  der Matrix  $\begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma} \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}$  und  $\langle \frac{d^2}{dt^2}f(\gamma(t)), Df_{\gamma(t)}(e_{2,\sigma}(t)) \rangle = -2 \text{Spur} \left( \begin{pmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ \sin(2t) & -\cos(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} \right) \equiv 0$ . Ist  $\sigma = 1$ , so entspricht  $Df_{\gamma(t)}(e_{2,\sigma}(t))$  der Matrix  $\begin{pmatrix} -2\cos(t)\sin(t) & \cos^2(t) - \sin^2(t) \\ \cos^2(t) - \sin^2(t) & 2\cos(t)\sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(2t) & \cos(2t) \\ \cos(2t) & \sin(2t) \end{pmatrix}$ . Es ist  $\langle \frac{d^2}{dt^2}f(\gamma(t)), Df_{\gamma(t)}(e_{2,1}(t)) \rangle = -2 \text{Spur} \left( \begin{pmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ \sin(2t) & -\cos(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(2t) & \cos(2t) \\ \cos(2t) & \sin(2t) \end{pmatrix} \right) \equiv 0$ . Also ist  $\frac{D}{dt}(f \circ \gamma)'(t) \equiv 0$  und  $f \circ \gamma$  eine Geodätische. Ferner lässt sich leicht nachrechnen, dass

$$\begin{aligned} Df_{\gamma(t)}(e_{1,\sigma}(t)) &= 0 && \text{für alle } \sigma, \\ \|Df_{\gamma(t)}(e_{\nu,\sigma}(t))\| &= \sqrt{2} && \text{für alle } \nu \geq 2 \text{ und } \sigma \text{ sowie} \\ \langle Df_{\gamma(t)}(e_{\nu,\sigma}(t)), Df_{\gamma(t)}(e_{\mu,\tau}(t)) \rangle &= 0 && \text{für alle } (\mu, \tau) \neq (\nu, \sigma) \end{aligned}$$

gilt. Des Weiteren stellen wir fest, dass die Rechnungen nur bedingt von der Wahl von  $\dot{\gamma}(0)$  abhängen. Jedes normierte  $v \in \text{Span}\{e_{\nu,\sigma}; \nu \geq 2, \sigma = 1, i, j \text{ oder } k\}$  ergibt einen solchen geodätischen Kreis. Dadurch sehen wir, dass alle Geodätischen in  $\mathbb{V}_n$  ab  $f(\gamma(0))$  Kreise mit Radius  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  sind.

Es sei  $P : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow O, u \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{P}(u) \end{pmatrix}$  eine Kurve mit  $P(0) = E$ . Dann sind sowohl  $P(u)\gamma$  als auch  $f \circ (P(u)\gamma)$  Geodätische für alle  $u$ . Also sind  $(t, u) \mapsto P(u)\gamma(t)$  und  $(t, u) \mapsto f(P(u)\gamma(t))$  Variationen von  $\gamma$  bzw.  $f \circ \gamma$  durch Geodätische. Die Jacobifelder  $\vec{Z}_{\nu,\sigma} \in J_0^\perp(\gamma)$ , deren Ableitungen  $\frac{D}{dt}\vec{Z}_{\nu,\sigma}(0) = e_{\nu,\sigma}$  die Standardorthonormalbasis von  $T_{\gamma(0)}\mathbb{S} = (\gamma(0))^\perp$  bilden, lauten  $\vec{Z}_{2,1}(t) = \dot{\gamma}(t)$  und  $\vec{Z}_{\nu,\sigma}(t) = \sigma \sin(t)e_\nu$ , wobei  $\sigma \neq 1$  ist, falls  $\nu \leq 2$  ist<sup>5</sup>. Wir definieren orthogonale Jacobifelder  $\vec{Y}_{\nu,\sigma} \in J_0^\perp(f \circ \gamma)$  durch  $\vec{Y}_{\nu,\sigma}(t) := Df_{\gamma(t)}\vec{Z}_{\nu,\sigma}(t)$ . Es folgt für  $\nu \geq 3$

$$\vec{Y}_{\nu,\sigma}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma} \cos(t) \sin(t) & & & \\ & \bar{\sigma} \sin^2(t) & & & \\ & 0 & & & \\ & \vdots & & & \\ \sigma \cos(t) \sin(t) & \sigma \sin^2(t) & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma} \sin(2t) & & & \\ & \bar{\sigma}(1 - \cos(2t)) & & & \\ & 0 & & & \\ & \vdots & & & \\ \sigma \sin(2t) & \sigma(1 - \cos(2t)) & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

und für  $\nu = 2$  und  $\sigma \neq 1$

$$\vec{Y}_{2,\sigma}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \cos(t) \sin(t) & & & \\ -\sigma \cos(t) \sin(t) & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = \frac{\sigma}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sin(2t) & & & \\ -\sin(2t) & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

<sup>5</sup>Ist  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ , so treten nur  $\vec{Z}_{\nu,1}$  mit  $\nu \geq 3$  auf.

Ihre Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} \Big|_{t=0} \vec{Y}_{\nu,\sigma}(t) &= \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (Df_{\gamma(t)} \vec{Z}_{\nu,\sigma}(t)) \right)^{\text{tang}} \\ &= \left( \gamma(0) \overline{\vec{Z}'_{\nu,\sigma}(0)}^T + \vec{Z}'_{\nu,\sigma}(0) \overline{\gamma(0)}^T \right)^{\text{tang}} = Df_{\gamma(0)}(\sigma e_\nu) \end{aligned}$$

bilden zusammen mit  $(f \circ \gamma)'(0)$  eine Orthogonalbasis von  $T_{f(\gamma(0))} \mathbb{V}_n$ . Wir finden ein (sortiertes) Orthonormalsystem  $E_2^\sigma, E_3^\sigma, \dots, E_{2n}^\sigma$ , so dass

$$\begin{aligned} \vec{Y}_{2,\sigma}(t) &= \frac{1}{2} \sin(2t) \sqrt{2} E_2^\sigma & \text{und} \\ \vec{Y}_{\nu,\sigma}(t) &= \frac{1}{2} \sin(2t) \sqrt{2} E_{2\nu-3}^\sigma + \frac{1}{2} (1 - \cos(2t)) \sqrt{2} E_{2\nu-2}^\sigma \\ &= \sin(t) \cdot \left( \cos(t) \sqrt{2} E_{2\nu-3}^\sigma + \sin(t) \sqrt{2} E_{2\nu-2}^\sigma \right) & \text{für } 3 \leq \nu \leq n+1 \end{aligned}$$

gilt. Die  $\vec{Y}_{\nu,\sigma}$  sind also trigonometrisch polynomiale Vektoren.

**Umparametrisierung:** Da  $f \circ \gamma$  und die  $\vec{Y}_{\nu,\sigma}$   $\pi$ -periodisch sind, parametrisieren wir um, um Periode  $2\pi$  und so die Schreibweisen von Kapitel 5 zu erhalten. Ferner stauchen wir sie, so dass die Ableitungen  $\vec{Y}'_{\nu,\sigma}(0)$  Länge 1 besitzen. Ab sofort sei

$$\begin{aligned} f(\gamma(t)) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+\cos(t) & \sin(t) & & \\ \sin(t) & 1-\cos(t) & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix} & \text{sowie } \left\| \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \vec{Y}_{2,\sigma}(t) &= \sin(t) E_2^\sigma & \text{und} \\ \vec{Y}_{\nu,\sigma}(t) &= \sin(t) E_{2\nu-3}^\sigma + \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - \cos(t)) E_{2\nu-2}^\sigma \\ &= 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cdot \left( \cos\left(\frac{t}{2}\right) E_{2\nu-3}^\sigma + \sin\left(\frac{t}{2}\right) E_{2\nu-2}^\sigma \right) & \text{für } 3 \leq \nu \leq n+1. \end{aligned}$$

In komplexer Schreibweise  $z = e^{it}$  lauten die Jacobifelder dann

$$\begin{aligned} \vec{Y}_{2,\sigma}(t) &= \frac{1}{z} \frac{1}{2i} (z^2 - 1) E_2^\sigma \Big|_{z=e^{it}} & \text{und} \\ \vec{Y}_{\nu,\sigma}(t) &= \frac{1}{z} \left( \frac{1}{2i} (z^2 - 1) E_{2\nu-3}^\sigma - \frac{1}{2} (z^2 - 2z + 1) E_{2\nu-2}^\sigma \right) \Big|_{z=e^{it}}. \end{aligned}$$

Des Weiteren definieren wir Vektorfelder  $\vec{E}_{\nu,\sigma} \in \mathcal{V}^T(\gamma)$  durch

$$\begin{aligned} \vec{E}_{2,\sigma}(t) &:= E_2^\sigma & \text{und} \\ \vec{E}_{\nu,\sigma}(t) &:= \cos\left(\frac{t}{2}\right) E_{2\nu-3}^\sigma + \sin\left(\frac{t}{2}\right) E_{2\nu-2}^\sigma. \end{aligned}$$

Offenbar sind die  $\vec{E}_{\nu,\sigma}$  paarweise orthogonal mit Länge 1. Ferner ist  $\frac{d}{dt} \vec{E}_{2,\sigma}(t) \equiv 0$  und  $\frac{d}{dt} \vec{E}_{\nu,\sigma}(t) = -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{t}{2}\right) E_{2\nu-3}^\sigma + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{t}{2}\right) E_{2\nu-2}^\sigma$ . Daher ist  $\langle \vec{E}_{\nu,\sigma}(t), \vec{E}_{\mu,\sigma}(t) \rangle \equiv 0$  für alle

$2 \leq \nu < \mu \leq n+1$  und wir sehen, dass die  $\vec{E}_{\nu,\sigma}$  ein Orthormalsystem von parallelen Vektorfeldern längs  $\gamma$  sind, durch welches sich die Jacobifelder

$$\begin{aligned} \vec{Y}_{2,\sigma}(t) &= \sin(t) \vec{E}_{2,\sigma}(t) && \text{und} \\ \vec{Y}_{\nu+2,\sigma}(t) &= 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \vec{E}_{\nu,\sigma}(t) && \text{für } 1 \leq \nu \leq n-1 \end{aligned}$$

schön darstellen lassen. Wir berechnen nun Lagrange- und Jacobitensoren längs  $f \circ \gamma$ . Aus Übersichtlichkeitsgründen führen wir die Rechnung nur für  $\mathbb{F} = \mathbb{H}$  durch – für  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$  müssen wir lediglich Spalten weglassen. Ein Lagrangetensor  $\mathcal{Y}$  mit  $\mathcal{Y}(0) = 0$ , so dass die Spaltenvektoren der kovarianten Ableitung  $\frac{D}{dt}|_{t=0} \mathcal{Y}(t)$  eine Orthogonalbasis von  $T_{f(\gamma(0))} \mathbb{V}_n$  bilden, ist

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(t) &= (\vec{Y}_{2,i}, \vec{Y}_{2,j}, \vec{Y}_{2,k}; \vec{Y}_{3,1}, \vec{Y}_{3,i}, \dots, \vec{Y}_{n+1,k})(t) \\ &= \frac{-1}{2z} \left( \begin{array}{ccc|ccc} i(z^2-1) & & & & & \\ & i(z^2-1) & & & & \\ & & i(z^2-1) & & & \\ \hline & & & i(z^2-1) & & \\ & & & (z-1)^2 & & \\ & & & & i(z^2-1) & \\ & & & & (z-1)^2 & \\ & & & & & \ddots \end{array} \right) \Big|_{z=e^{it}} \\ &=: z^{-1} R(z) \Big|_{z=e^{it}} \\ &= \underbrace{(\vec{E}_{2,i}, \vec{E}_{2,j}, \vec{E}_{2,k}; \vec{E}_{3,1}, \vec{E}_{3,i}, \dots, \vec{E}_{n+1,k})}_{=: \mathcal{E}(t)}(t) \left( \begin{array}{c|c} \sin(t) E_{3 \times 3} & \\ \hline & 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) E_{(l-3) \times (l-3)} \end{array} \right) \end{aligned}$$

mit  $l = nr_{\mathbb{F}} - 1$ . Ferner ist

$$\mathfrak{g}(z) := (R(z))^T R(z) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} -\frac{1}{4}(z^2-1)^2 & & & & & \\ & -\frac{1}{4}(z^2-1)^2 & & & & \\ & & -\frac{1}{4}(z^2-1)^2 & & & \\ \hline & & & -z(z-1)^2 & & \\ & & & & -z(z-1)^2 & \\ & & & & & \ddots \end{array} \right)$$

und  $\det(\mathfrak{g}(z)) = \frac{(-1)^l}{64} z^{l-3} (z+1)^6 (z-1)^{2l}$  sowie

$$\begin{aligned} \frac{1}{iz} \left( \frac{1}{z^2} \mathfrak{g}(z) \right)^{-1} &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} \frac{4iz}{(z^2-1)^2} & & & & & \\ & \frac{4iz}{(z^2-1)^2} & & & & \\ & & \frac{4iz}{(z^2-1)^2} & & & \\ \hline & & & \frac{i}{(z-1)^2} & & \\ & & & & \frac{i}{(z-1)^2} & \\ & & & & & \ddots \end{array} \right) \\ &= \frac{i}{(z-1)^2} \cdot \left( \begin{array}{c|c} E_{3 \times 3} & \\ \hline & E_{(l-3) \times (l-3)} \end{array} \right) - \frac{i}{(z+1)^2} \cdot \left( \begin{array}{c|c} E_{3 \times 3} & \\ \hline & 0_{(l-3) \times (l-3)} \end{array} \right). \end{aligned}$$



Integrieren wir dies längs einem Teilintervall  $t_0, t \in (0, \pi)$ , so erhalten wir mit  $z = e^{it}$  und  $z_0 = e^{it_0}$

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^t (G(s))^{-1} ds = \int_{z_0}^z \left( \frac{1}{\zeta^2} \mathfrak{g}(\zeta) \right)^{-1} \frac{1}{i\zeta} d\zeta \\
&= \underbrace{\frac{-i}{(\zeta-1)} \Big|_{\zeta=z_0}^z}_{=\frac{i(z-z_0)}{(z-1)(z_0-1)}} \cdot \left( \frac{E_{3 \times 3}}{E_{(l-3) \times (l-3)}} \right) - \underbrace{\frac{-i}{(\zeta+1)} \Big|_{\zeta=z_0}^z}_{=\frac{i(z-z_0)}{(z+1)(z_0+1)}} \cdot \left( \frac{E_{3 \times 3}}{0_{(l-3) \times (l-3)}} \right) \\
&= \left( \frac{\frac{2i(z^2-z_0^2)}{(z^2-1)(z_0^2-1)} E_{3 \times 3}}{\frac{i(z-z_0)}{(z-1)(z_0-1)} E_{(l-3) \times (l-3)}} \right)
\end{aligned}$$

Ein weiterer Jacobitensor ist für solche  $t$  und  $t_0$  nach 2.12 durch

$$\begin{aligned}
\hat{\mathfrak{y}}(t) &= \mathfrak{y}(t) \cdot \int_{t_0}^t (G(s))^{-1} ds \\
&= \frac{-1}{2z} \left( \frac{i(z^2-1)E_{3 \times 3}}{\begin{array}{c|c|c} & i(z^2-1) & \\ \hline & (z-1)^2 & \\ \hline & & \ddots \end{array}} \right) \left( \frac{\frac{2i(z^2-z_0^2)}{(z^2-1)(z_0^2-1)} E_{3 \times 3}}{\frac{i(z-z_0)}{(z-1)(z_0-1)} E_{(l-3) \times (l-3)}} \right) \\
&= \frac{1}{z} \left( \frac{\frac{(z^2-z_0^2)}{(z_0^2-1)} E_{3 \times 3}}{\begin{array}{c|c|c} & \frac{(z+1)(z-z_0)}{2(z_0-1)} & \\ \hline & \frac{-i(z-1)(z-z_0)}{2(z_0-1)} & \\ \hline & & \ddots \end{array}} \right)
\end{aligned}$$

gegeben. Wir können  $\hat{\mathfrak{y}}$  auch anders berechnen – dasselbe Ergebnis erhalten wir durch einsetzen von  $z = e^{it}$  und  $z_0 = e^{it_0}$  in die obige Gleichung. Durch

$$G(t) = \begin{pmatrix} \sin^2(t) E_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & 4 \sin^2(\frac{t}{2}) E_{(l-3) \times (l-3)} \end{pmatrix}$$

und  $\int_{t_0}^t \frac{1}{\sin^2(\vartheta s)} ds = \left[ -\frac{\cos(\vartheta s)}{\vartheta \sin(\vartheta s)} \right]_{s=t_0}^t = \frac{\sin(\vartheta(t-t_0))}{\vartheta \sin(\vartheta t) \sin(\vartheta t_0)}$  folgt

$$\hat{\mathfrak{y}}(t) = \mathcal{E}(t) \left( \frac{\frac{\sin(t-t_0)}{\sin(t_0)} E_{3 \times 3}}{\frac{\sin(\frac{t-t_0}{2})}{\sin(\frac{t_0}{2})} E_{(l-3) \times (l-3)}} \right).$$

Jeder andere Jacobitensor ist gegeben durch  $\mathcal{Z}(t) = \hat{\mathfrak{y}}(t)C_2 + \mathfrak{y}(t)C_1$  mit  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{l \times l}$ . Daher sehen wir, dass  $\mathcal{Z}(t) = z^{-1}R_{\mathcal{Z}}(z)|_{z=e^{it}}$  mit  $\text{Grad}(R_{\mathcal{Z}}) = 2$  gilt.



### 3 Schraubenmannigfaltigkeiten

Eine Kurve  $\gamma$  ist genau dann eine Schraubenlinie, wenn der *extrinsische (euklidische) Abstand* zweier Punkte auf  $\gamma$  eine Funktion des *intrinsischen Abstandes (Längenmaß)* ist, siehe Satz 2.18. Es sei  $M \subset \mathbb{R}^N$  eine  $n$ -dimensionale, vollständige, zusammenhängende Untermannigfaltigkeiten und  $d_M$  die von der ersten Fundamentalform induzierte Metrik, die *intrinsische Metrik*. Der extrinsische (euklidische) Abstand zweier Punkte auf  $M$  sei eine Funktion ihres intrinsischen Abstandes:

$$\text{Für alle } p, q \in M \text{ gelte } \|p - q\|^2 = F(d_M(p, q)) . \quad (3.1)$$

Da  $M$  vollständig und zusammenhängend ist, lassen sich zwei Punkte  $p, q \in M$  stets durch eine Kürzeste  $\gamma$  mit  $\|\dot{\gamma}(t)\| \equiv 1$  verbinden. Diese erfüllt für alle  $s, t \in \mathbb{R}$  mit  $|t - s| < \text{inj}(M)$

$$\|\gamma(t) - \gamma(s)\|^2 = F(d_M(\gamma(t), \gamma(s))) \stackrel{\text{Kürzeste}}{=} F(|t - s|) .$$

Nach der Bemerkung zu Satz 2.18 folgt, dass  $\gamma$  eine Schraubenlinie ist, deren Krümmungen nur von  $F^{(2i)}(0)$  abhängen.

**Definition 3.1** (Schraubenmannigfaltigkeit):

Eine vollständige, zusammenhängende Untermannigfaltigkeiten  $M \subset \mathbb{R}^N$ , deren Geodätische kongruente Schraubenlinien sind, heißt *Schraubenmannigfaltigkeit* oder *helikale Untermannigfaltigkeit*.

**Bemerkung 3.2:** (i) In der englischsprachigen Literatur werden Schraubenmannigfaltigkeiten *helical manifold* genannt. Eine (lokal) isometrische Immersion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ , deren Bild eine Schraubenmannigfaltigkeit ist, heißt daher *helikale Immersion*.

(ii) Die Frenetkrümmungen der Geodätischen in  $M$  sind für jede Geodätische gleich.

Wir sehen direkt die folgende Proposition.

**Proposition 3.3** (vgl. [Sak86b]): *Eine vollständige, zusammenhängende Untermannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^N$  ist genau dann eine Schraubenmannigfaltigkeit, wenn der extrinsische Abstand zweier Punkte eine Funktion ihres intrinsischen Abstandes ist.*

**Lemma 3.4:** Für  $p, q \in M$ , die nahe beieinander liegen, gilt auch die Umkehrung

$$d_M(p, q) = \tilde{F}(\|p - q\|) .$$

„Nahe“ bedeutet für alle  $p, q \in M$ , so dass  $F'(t) \neq 0$  ist für alle  $0 < t \leq d_M(p, q)$ .

**Beweis:** Es sei  $p \in M$  und  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M, t \mapsto p + t \cdot \xi_0 + e^{tX} \xi_1 - \xi_1$  eine Geodätische ab  $p$ . Nach Satz 2.18 ist  $F(t) = t^2 \|\xi_0\|^2 + 2 \sum_{l=1}^k x_l^2 [1 - \cos(\vartheta_l t)]$  mit Ableitung  $F'(t) = 2t \|\xi_0\|^2 + 2 \sum_{l=1}^k x_l^2 \vartheta_l \sin(\vartheta_l t)$ . Für kleine  $t > 0$  ist  $F'(t) > 0$ , also ist  $F$  hier monoton wachsend und somit auf einem kleinen Intervall  $[0, \varepsilon]$  invertierbar. Es gilt also  $\tilde{F}(\|p - \gamma(t)\|) := (F|_{[0, \varepsilon]})^{-1}(\|p - \gamma(t)\|^2)$ . □

**Beispiel 3.5:**

(i) Einfache Beispiele für Schraubenmannigfaltigkeiten sind Untervektorräume und Sphären. In Kapitel 2.6 haben wir gesehen, dass auch die Veronese-Einbettungen der projektiven Räume Schraubenmannigfaltigkeiten sind.

(iii) Das Konzept von Schraubenmannigfaltigkeiten geht auf A. L. Besse zurück, siehe [Sak82]. A. L. Besse konstruiert in [Bes78] 6.99ff. sogenannte *Nice Imbeddings* einer streng harmonischen Mannigfaltigkeit  $(M^n, g)$  in eine Sphäre des euklidischen Raumes. Wir erinnern, dass nach Szabó die streng harmonische Mannigfaltigkeit  $M$  ein CROSS ist [Sza90]. Zu einem festen (echt positiven) Eigenwert  $\lambda$  des Laplaceoperator auf Funktionen auf  $M$  sei  $(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$  eine Orthonormalbasis des Eigenraumes zu  $\lambda$ . Die Abbildung  $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}^N, p \mapsto (\varphi_1(p), \dots, \varphi_N(p))^T$  ist eine Immersion in eine Sphäre  $\mathbb{S}_R(0)$  um den Ursprung vom Radius  $R := \sqrt{\frac{n}{\text{vol}(g)}}$ . Das Bild  $\Phi(M)$  ist eine minimale Untermannigfaltigkeit in  $\mathbb{S}_R(0)$ . Ferner ist  $\Phi$  bis auf den Faktor  $\frac{\lambda}{\text{vol}(g)}$  eine Isometrie zwischen  $(M, g)$  und  $(\Phi(M), \bar{g})$ , wobei  $\bar{g}$  die erste Fundamentalform ist. Zudem ist  $\Phi$  eine Einbettung, außer wenn  $M^n$  diffeomorph zu  $\mathbb{S}^n$  ist und  $\Phi$  eine Überlagerungsabbildung von  $\mathbb{RP}^n$  ist. Besse zeigt in Proposition 6.112, dass das Bild  $\Phi(M)$  einer solchen *Nice Imbedding* eine Schraubenmannigfaltigkeit ist. Ist  $\lambda$  der  $k$ -te Eigenwerte von  $(M, g)$ , so heißt  $\Phi_k := \Phi$  die *k-te minimale Standardeinbettung von  $(M, g)$* , vgl. [Tsu83]. Es seien  $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}^+$  Konstanten mit  $\sum_{j=1}^m c_j^2 = 1$ , so ist

$$\Phi_{k_1, \dots, k_m} : M \rightarrow \mathbb{R}^{\sum_{j=1}^m N_j}, p \mapsto (c_1 \Phi_{k_1}(p), \dots, c_m \Phi_{k_m}(p))$$

ebenfalls eine helikale Immersion nach geeignetem homothetischem Stauchen, vgl. ebenda. Tsukada zeigt:

**Satz 3.6** (vgl. [Tsu83] und [Sak86b]): *Es sei  $\Phi : M \rightarrow \mathbb{S}^{N-1}$  eine helikale Immersion eines kompakten symmetrischen Raumes von Rang 1 in eine Einheitssphäre. Dann gibt es paarweise verschiedene  $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}_0$ , so dass  $\Phi$  zu  $\Phi_{k_1, \dots, k_m}$  äquivalent ist. Dabei bedeutet  $k_j = 0$ , dass  $\Phi_{k_j}(M)$  ein Punkt ist.*

Ist  $M \subset \mathbb{R}^N$  eine  $n$ -dimensionale Schraubenmannigfaltigkeit und  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische in  $M$  mit konstanten Frenetkrümmungen  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ , so folgt in Termen der zweiten Fundamentalform  $\alpha$  direkt:

**Lemma 3.7** (vgl. [Sak82]):  *$M$  ist  $\kappa_1$ -isotrop, d.h. es gilt  $\|\alpha(v, v)\| = \kappa_1$  für alle  $v \in \mathbb{S}M$ .*

*Beweis:* Es sei  $\dot{\gamma}(0) = v$ . Dann ist  $\ddot{\gamma}(t) = \frac{D}{dt}\dot{\gamma}(t) + \alpha(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = \alpha(v, v)$  und  $\|\alpha(v, v)\| = \|\ddot{\gamma}(t)\| = \kappa_1$ . Nach Definition ist dies unabhängig von der Wahl von  $v \in \mathbb{S}M$  mit  $\|v\| = 1$ . □

Sakamoto beweist Folgendes.

**Satz 3.8** (Sakamoto, vgl. [Sak86b]): *Es sei  $M$  eine vollständige Schraubenmannigfaltigkeit. Dann ist  $M$  ein affiner Untervektorraum oder eine Blaschkemannigfaltigkeit.*

In diesem Artikel [Sak86b] weist Sakamoto auf eine Vermutung von Chen und Verheyen hin, dass jede Schraubenmannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^N$  eine offene Teilmenge eines affinen Unterraumes oder in einer Sphäre enthalten ist. Ferner zeigt er dies unter der Voraussetzung, dass  $M$  ein D'Atri-Raum ist. Weiter schreibt er, es scheine schwierig zu zeigen, dass  $M$  ein D'Atri-Raum ist. Ein D'Atri-Raum ist eine riemannsche Mannigfaltigkeit, so dass lokale geodätische Spiegelungen das Volumenelement erhalten. In Polarkoordinaten um  $p$ , siehe (2.6), bedeutet dies  $\omega_p(-t, \psi) = \omega_p(t, \psi)$  für das Volumenelement  $\omega_p(t, \psi) := \sqrt{\det(g_{ij}(t, \psi))_{i,j \in \underline{n}}}$ , alle  $\psi \in \mathbb{S}^{n-1}$  und kleine  $t > 0$ . Diese Bedingung ist eine Abschwächung von harmonischen Mannigfaltigkeiten, auf denen  $\omega_p(t, \psi) = \varphi_p(t)$  eine Funktion allein des Abstandes von  $p$  ist.

Er zeigt, dass jede Geodätische  $\gamma$  ein Normalschnitt ist, siehe Kapitel 3.1. Dazu stellt er Jacobifelder längs  $\gamma$  durch das Frenetbein von  $\gamma$  in  $p = \gamma(0)$  dar und zerlegt sie so in tangentialen und normalen Anteil bezüglich  $p$ . In Kapitel 3.2 werden wir eine Darstellung von Jacobifeldern längs  $\gamma$  durch (konstante!) Matrizen geben. Wir zeigen, dass solche Matrizen eine lineare Gleichung lösen, und untersuchen, wie solche Lösungen zusammenhängen. Diese Darstellung zeigt weiter, dass die Einträge der Jacobifelder trigonometrische Polynome sind. Solche Jacobifelder werden wir in den Kapiteln 4 und 5 studieren.

### 3.1 Geodätische Normalschnitte

Es seien  $M \subset \mathbb{R}^N$  eine zusammenhängende Untermannigfaltigkeit,  $p \in M$  und  $v \in T_p M$ . Dann ist  $\text{Span}(v) \oplus \nu_p M$  ein  $(N - n + 1)$ -dimensionaler Untervektorraum. In einer Umgebung von  $p$  ist  $M \cap (p + \text{Span}(v) \oplus \nu_p M)$  eine Kurve in  $M$ , ein sogenannter *Normalschnitt*, vgl. [VC84]. Sakamoto in [Sak82] Satz 3.1 und Verheyen in [Ver85] zeigen folgende Äquivalenz:

**Satz 3.9:** *Es sei  $M \subset \mathbb{R}^N$  eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit, dann sind äquivalent:*

- (i)  *$M$  ist eine Schraubenmannigfaltigkeit.*
- (ii) *Jede Geodätische ist in jedem Punkt ein Normalschnitt von  $M$ .*

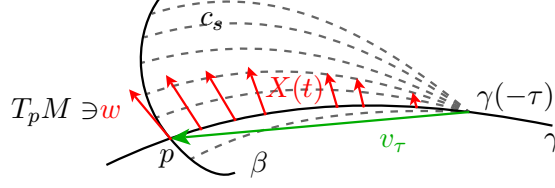
Sakamoto berechnet eigentlich das Frenetbein  $b_1, \dots, b_k$  längs einer Geodätischen  $\gamma$  in einer Schraubenmannigfaltigkeit:

$$b_1(t) = \dot{\gamma}(t)$$

$$b_j(t) = \frac{1}{\kappa_1 \cdots \kappa_{j-1}} \sum_{i \in I(j)} a_{ij} \left( (\nabla^\perp)^{i-2} \right) (\dot{\gamma}(t)^i) \quad \text{für alle } 2 \leq j \leq k,$$

wobei  $I(j) = \begin{cases} \{2, 4, \dots, j\}, & \text{falls } j \text{ gerade} \\ \{3, 5, \dots, j\}, & \text{falls } j \text{ ungerade} \end{cases}$  ist und die  $a_{ij}$  Polynome in den Frenetkrümmungen  $\kappa_1, \dots, \kappa_{j-2}$  sind. Er zeigt damit (i)  $\Rightarrow$  (ii). Verheyen beweist die Rückrichtung. Beide Beweise nutzen höhere Ableitungen von  $\gamma$  sowie die Gauß-, Mainardi-Codazzi- und Riccigleichungen. Wir wollen hier einen neuen Beweis geben, dass Geodätische in Schraubenmannigfaltigkeiten in jedem Punkt Normalschnitte sind, indem wir die erste Variation der Länge und Lemma 3.4 nutzen.

**Beweis:** Es sei  $p \in M$  und  $\gamma$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische ab  $p$ . Es sei ferner  $0 < \varepsilon \leq \text{inj}(p)$ , so dass  $F'(t) \neq 0$  für alle  $t \in (0, \varepsilon)$  gilt,  $0 < \tau < \varepsilon$  und  $v_\tau := p - \gamma(-\tau) =: v^{\text{tang}} + v^\perp \in T_{\gamma(0)} M \oplus \nu_{\gamma(0)} M$ . Ferner sei  $\beta : (-\delta, \delta) \rightarrow M$  eine Kurve ab  $p$  mit  $w := \beta'(0) \in T_p M$ . Weiter sei  $H : (-\delta, \delta) \times [0, \tau] \rightarrow M, (s, t) \mapsto c_s(t)$  eine Variation durch Geodätische, wobei die Kurven  $c_s$  Kürzeste von  $c_s(0) = \gamma(-\tau)$  nach  $c_s(\tau) = \beta(s)$  seien. Eine solche Variation  $H$  existiert, da wir  $\varepsilon$  klein genug wählen können, so dass die Geodätischen  $c_s$  eindeutig sind. Sie sind nicht unbedingt nach der Bogenlänge parametrisiert. Nach Wahl von  $H$  durchläuft  $c_0$  die Kurve  $\gamma|_{[-\tau, 0]}$ , denn  $c_0(t) = \gamma(t - \tau)$ . Weiterhin sei  $X \in \vec{J}(c_0)$  das zugehörige Jacobifeld der Variation. Wir haben daher  $X(0) = 0$  und  $X(\tau) = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} c_s(\tau) = \beta'(0) = w$ .



Mit der ersten Variationsformel berechnen wir

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} d_M(\gamma(-\tau), \beta(s)) &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(c_s) \\
 &= - \int_0^\tau \left\langle \frac{D}{dt} c'_0(t), X(t) \right\rangle dt + \langle X(\tau), c'_0(\tau) \rangle - \langle X(0), c'_0(0) \rangle \\
 &= - \int_0^\tau 0 \, dt + \langle \beta'(0), \dot{\gamma}(0) \rangle - \langle 0, c'_0(0) \rangle \\
 &= \langle w, \dot{\gamma}(0) \rangle.
 \end{aligned}$$

Es ist  $\|v_\tau\|^2 = \|\gamma(0) - \gamma(-\tau)\|^2 = F(\tau)$  und mit  $\tilde{F}(\|v_\tau\|) := F|_{[0,\varepsilon]}^{-1}(\|v_\tau\|^2)$  ist nach Lemma 3.4  $\tilde{F}'(\|v_\tau\|) = \frac{2\|v_\tau\|}{F'(\tau)} \neq 0$ . Mit (3.1) folgt daraus

$$\begin{aligned}
 \langle w, \dot{\gamma}(0) \rangle &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} d_M(\gamma(-\tau), \beta(s)) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \tilde{F}(\|\gamma(-\tau) - \beta(s)\|) \\
 &= \tilde{F}'(\|\gamma(-\tau) - \beta(0)\|) \cdot \frac{\langle \beta'(0), \beta(0) - \gamma(-\tau) \rangle}{\|\beta(0) - \gamma(-\tau)\|} \\
 &= \langle w, \frac{\tilde{F}'(\|v_\tau\|)}{\|v_\tau\|} \cdot v_\tau \rangle = \langle w, \frac{\tilde{F}'(\|v_\tau\|)}{\|v_\tau\|} \cdot v^{\text{tang}} \rangle,
 \end{aligned}$$

wobei  $v^{\text{tang}}$  die tangentielle Komponente von  $v_\tau$  in  $T_{\gamma(0)}M$  bezeichne. Damit gilt

$$0 = \langle w, \dot{\gamma}(0) \rangle - \langle w, \frac{\tilde{F}'(\|v_\tau\|)}{\|v_\tau\|} \cdot v^{\text{tang}} \rangle = \langle w, \dot{\gamma}(0) - \frac{\tilde{F}'(\|v_\tau\|)}{\|v_\tau\|} v^{\text{tang}} \rangle$$

für alle  $w \in T_{\gamma(0)}M$ . Somit ist  $\dot{\gamma}(0) - \frac{\tilde{F}'(\|v_\tau\|)}{\|v_\tau\|} v^{\text{tang}} \in \nu_{\gamma(0)}M$ , also der Nullvektor, folglich  $\dot{\gamma}(0) = \frac{\tilde{F}'(\|v_\tau\|)}{\|v_\tau\|} v^{\text{tang}}$ . Also gilt für alle  $0 < \tau < \varepsilon$

$$\gamma(-\tau) = \gamma(0) - v_\tau \in \gamma(0) + \mathbb{R} \dot{\gamma}(0) \oplus \nu_{\gamma(0)}M.$$

Daher sind alle Ableitungen  $\gamma^{(i)}(0) \in \mathbb{R} \dot{\gamma}(0) \oplus \nu_{\gamma(0)}M$  somit auch das Frenetbein von  $\gamma$  in 0. Es folgt, dass sogar für alle  $t \in \mathbb{R}$

$$\gamma(t) \in \gamma(0) + \mathbb{R} \dot{\gamma}(0) \oplus \nu_{\gamma(0)}M. \quad (3.2)$$

Also ist  $\gamma$  ein Normalschnitt in jedem Punkt. □

### 3.2 Jacobifelder auf Schraubenmannigfaltigkeiten

Es sei  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M \subset \mathbb{R}^N$  eine Geodätische in einer  $n$ -dimensionalen Schraubenmannigfaltigkeit  $M$ . Es gibt  $X \in \mathfrak{so}(N), \xi, p \in \mathbb{R}^N$ , so dass

$$\mathbb{R}^N \times \{1\} \ni \left( \frac{\gamma(t)}{1} \right) = \exp \left( t \left( \frac{X \mid \xi}{0 \mid 0} \right) \right) \cdot \left( \frac{p}{1} \right) \quad (3.3)$$

gilt und  $\text{Rang}(X) = 2k$  kleinstmöglich ist sowie  $-\vartheta_k^2 < \dots < -\vartheta_1^2 < 0 \in \mathbb{R}$  die Eigenwerte von  $X^2$  mit zweidimensionalen Eigenräumen sind. Ferner seien  $\xi = \xi_0 + X\xi_1$  und  $p = p_0 + p_1$  mit eindeutigen  $\xi_0, p_0 \in \text{Kern}(X)$  und  $\xi_1, p_1 \in \text{Bild}(X)$ .

In diesem Kapitel werden wir zunächst zeigen, dass ein Jacobifeld  $\vec{Y}$  längs  $\gamma$  durch eine Matrix  $\left( \frac{A \mid b}{0 \mid 0} \right) \in \mathfrak{so}(N) \ltimes \mathbb{R}^N$  als  $\vec{Y}(t) = A\gamma(t) + b$  bestimmt ist (Proposition 3.10 und Lemma 3.12). Dann werden wir zeigen, dass  $\left( \frac{A \mid b}{0 \mid 0} \right)$  die Lösung einer linearen Gleichung (3.4) ist. Im Folgenden werden wir den Lösungsraum dieser Gleichung berechnen.

**Proposition 3.10:** Zu einem Jacobifeld  $\vec{Y} \in J(\gamma)$  auf einer Schraubenmannigfaltigkeit gibt es ein  $A \in \mathfrak{so}(N)$  und ein  $\alpha \in \mathbb{R}^N$ , so dass  $\vec{Y}(t) = A\gamma(t) + \alpha$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt.

**Bemerkung 3.11:** Insbesondere ist  $\vec{Y}$  ein trigonometrisch polynomialer Vektor, vgl. Definition 2.20. Wir werden folgende Schreibweisen mit  $\left( \frac{A \mid \alpha}{0 \mid 0} \right) \in \mathfrak{so}(N) \ltimes \mathbb{R}^N \cong \text{Lie}(\text{Isom}(\mathbb{R}^N))$  nutzen:

$$\vec{Y}(t) = A\gamma(t) + \alpha, \quad \text{bzw.} \quad \left( \frac{\vec{Y}(t)}{1} \right) = \left( \frac{A \mid \alpha}{0 \mid 0} \right) \left( \frac{\gamma(t)}{1} \right)$$

**Beweis:** Es sei  $\vec{Y} \in J(\gamma)$  ein Jacobifeld und  $F : \mathbb{R} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M, (t, u) \mapsto \gamma_u(t)$  eine differenzierbare Variation von  $\gamma$  durch Geodätische mit Variationsvektorfeld  $\vec{Y}$ . Jede Geodätische in  $M$  erhalten wir durch eine Isometrie  $H \in \text{Isom}(\mathbb{R}^N)$  als  $H \circ \gamma$ . Es sei  $H : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{R}^N)$ , so dass  $F(u, t) = H(u)(\gamma(t))$  gilt. Ein solches  $H$  existiert, da die Frenetbeine  $b_1(u), b_2(u), \dots, b_l(u)$  für die Kurven  $\gamma_u$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  mit  $l = \begin{cases} 2k, & \text{falls } \xi_0 = 0 \\ 2k+1, & \text{falls } \xi_0 \neq 0 \end{cases}$  differenzierbar von  $u$  abhängen. Da  $u \mapsto \gamma_u(0)$  differenzierbar ist, gibt es ein differenzierbares  $B : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow O(N)$ , so dass  $(b_1(u), b_2(u), \dots, b_l(u)) = B(u)(b_1(0), b_2(0), \dots, b_l(0))$  gilt. Nach dem Hauptsatz der Kurventheorie, vgl [Küh08], folgt

$$\begin{aligned} \left( \frac{F(t, u)}{1} \right) &= \left( \frac{B(u)(\gamma(t) - \gamma(0)) + \gamma_u(0)}{1} \right) \\ &= \left( \frac{B(u) \mid \gamma_u(0) - B(u)\gamma(0)}{0 \mid 1} \right) \cdot \left( \frac{\gamma(t)}{1} \right). \end{aligned}$$



Schließlich ist  $H$  darstellbar durch eine differenzierbare, matrixwertige Kurve. Wir setzen  $\left(\frac{A|\alpha}{0|0}\right) := \frac{d}{du}\Big|_{u=0} \left(\frac{B(u)|\gamma_u(0)-B(u)\gamma(0)}{0|1}\right) \in \mathfrak{so}(N) \ltimes \mathbb{R}^N \cong \text{Lie}(\text{Isom}(\mathbb{R}^N))$  und erhalten für alle  $t \in \mathbb{R}$

$$\left(\frac{\vec{Y}(t)}{1}\right) = \left(\frac{A|\alpha}{0|0}\right) \left(\frac{\gamma(t)}{1}\right), \quad \text{bzw.} \quad \vec{Y}(t) = A\gamma(t) + \alpha.$$

□

Es sei nun  $\vec{Y} \in J^\perp(\gamma)$  ein orthogonales Jacobifeld. Nach Satz 3.9 ist  $\gamma$  in jedem Punkt ein Normalschnitt an  $M$ , d.h. für alle  $t, s \in \mathbb{R}$  gilt (3.2)

$$\gamma(s) \in \gamma(t) + \mathbb{R} \dot{\gamma}(t) \oplus \nu_{\gamma(t)} M.$$

Folglich gilt  $\{-\gamma(t) + \gamma(s); s \in \mathbb{R}\} \subset \nu_{\gamma(t)} M \oplus \mathbb{R} \dot{\gamma}(t)$ . Da  $\text{Span}\{-\gamma(t) + \gamma(s); s \in \mathbb{R}\} = \text{Span}\{\gamma(s); s \in \mathbb{R}\} = \text{Bild}(X) \oplus \text{Span}\{\xi_0\}$  ist, folgt

$$\text{Bild}(X) \oplus \text{Span}\{\xi_0\} \leq \nu_{\gamma(t)} M \oplus \mathbb{R} \dot{\gamma}(t).$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \vec{Y}(t) &\in T_{\gamma(t)} M \cap (\mathbb{R} \dot{\gamma}(t))^\perp = (\nu_{\gamma(t)} M \oplus \mathbb{R} \dot{\gamma}(t))^\perp \\ &\leq (\text{Bild}(X) \oplus \text{Span}\{\xi_0\})^\perp = \text{Kern}(X) \cap (\text{Span}\{\xi_0\})^\perp. \end{aligned}$$

Sei  $w \in (\text{Bild}(X) \oplus \text{Span}\{\xi_0\})$ , dann ist  $\langle w, \vec{Y}(t) \rangle \equiv 0$  konstant, insbesondere ist  $0 = \langle w, \vec{Y}(0) \rangle = \langle w, Ap + \alpha \rangle$ . Weiterhin gilt

$$0 = \frac{1}{t} \langle w, \vec{Y}(t) \rangle = \langle w, A\xi_0 \rangle + \frac{1}{t} \underbrace{\langle w, A(e^{tX}\xi_1 - \xi_1 + p) + \alpha \rangle}_{\text{ist beschränkt}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \langle w, A\xi_0 \rangle.$$

Folglich sind auch

$$A\xi_0, Ap + \alpha \in (\text{Bild}(X) \oplus \text{Span}\{\xi_0\})^\perp$$

sowie

$$A(e^{tX}\xi_1 - \xi_1) = \vec{Y}(t) - tA\xi_0 - (Ap + \alpha) \in (\text{Bild}(X) \oplus \text{Span}\{\xi_0\})^\perp.$$

Wir erhalten  $A(\text{Bild}(X)) \leq (\text{Bild}(X) \oplus \text{Span}\{\xi_0\})^\perp$  und damit

$$A(\text{Bild}(X) + \text{Span}\{\xi_0\}) \leq \text{Kern}(X) \cap (\text{Span}\{\xi_0\})^\perp.$$

Es folgt:

**Lemma 3.12:** Es sei  $\vec{Y} \in J^\perp(\gamma)$  ein orthogonales Jacobifeld der Form  $\vec{Y}(t) = A\gamma(t) + \alpha$ . In einer Orthonormalbasis von  $(\text{Kern}(X) \cap (\text{Span}\{\xi_0\})^\perp) \oplus (\text{Bild}(X) + \text{Span}\{\xi_0\})$  dargestellt haben  $X$  und  $A$  die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{c|c} X & \xi \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) &= \left( \begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \tilde{\xi}_0 \\ \hline 0 & 0 & \tilde{X} & \tilde{\xi}_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \} \text{Kern}(X) \cap (\text{Span}\{\xi_0\})^\perp \\ \} \text{Span}\{\xi_0\} \\ \} \text{Bild}(X) \end{array} \\ \left( \begin{array}{c|c} A & \alpha \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) &= \left( \begin{array}{c|c|c|c} 0 & \tilde{a} & \tilde{A} & \tilde{\alpha} \\ \hline -\tilde{a}^T & 0 & 0 & \tilde{\alpha}_0 \\ \hline -\tilde{A}^T & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \} \text{Kern}(X) \cap (\text{Span}\{\xi_0\})^\perp \\ \} \text{Span}\{\xi_0\} \\ \} \text{Bild}(X) \end{array} \end{aligned}$$

**Bemerkung 3.13:**  $A$  ist nur bis auf die Wahl der Ecke links oben eindeutig. Die Wahl der 0 ist jedoch sinnvoll, denn es ist  $\vec{Y}(t) = A\gamma(t) + \alpha = (t + \langle p_0, \xi_0 \rangle)A\xi_0 + Ae^{tX}(\xi_1 + p_1) - A\xi_1 + A(p_0 - \langle p_0, \xi_0 \rangle\xi_0) + \alpha$ . Diese Untermatrix hängt also lediglich von  $\alpha$  ab und umgekehrt.

**Ohne Einschränkung** gelte ab sofort zudem  $p = \gamma(0) = 0 \in \mathbb{R}^N$ .

Nun habe  $\vec{Y} \in J(\gamma)$  konstanten tangentialen Anteil. Dann ist

$$\begin{aligned} \text{konst} &= \langle \vec{Y}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = \left\langle \left( \begin{array}{c|c} A & \alpha \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \vec{\gamma}(t), \dot{\vec{\gamma}}(t) \right\rangle \\ &= \left\langle \left( \begin{array}{c|c} A & \alpha \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \exp\left(t \left( \begin{array}{c|c} X & \xi \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \exp\left(t \left( \begin{array}{c|c} X & \xi \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)\right) \begin{pmatrix} X & \xi \\ \hline 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \langle e^{-t \left( \begin{array}{c|c} X & \xi \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)} \left( \begin{array}{c|c} A & \alpha \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) e^{t \left( \begin{array}{c|c} X & \xi \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \rangle. \end{aligned}$$

Somit erfüllt  $\left( \begin{array}{c|c} A & \alpha \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \in \mathfrak{so}(N) \ltimes \mathbb{R}^N$  folgende lineare Gleichung:

$$\langle e^{-t \left( \begin{array}{c|c} X & \xi \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)} \left( \begin{array}{c|c} Z & \zeta \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) e^{t \left( \begin{array}{c|c} X & \xi \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \equiv \text{konstant} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \quad (3.4)$$

Wir untersuchen nun allgemeine Lösungen von (3.4). Eine erste Konsequenz für eine solche Lösung  $\left( \begin{array}{c|c} Z & \zeta \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$  ist, dass

$$\begin{aligned} \text{konst} &= \langle e^{-t \left( \begin{array}{c|c} X & \xi \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)} \left( \begin{array}{c|c} Z & \zeta \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) e^{t \left( \begin{array}{c|c} X & \xi \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \\ &= \left\langle \left( \begin{array}{c|c} e^{-tX} & t\xi_0 + e^{tX}\xi_1 - \xi_1 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} Z & \zeta \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} t\xi_0 + e^{tX}\xi_1 - \xi_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= t\langle Z\xi_0, e^{tX}\xi \rangle + \langle e^{-tX}(Ze^{tX}\xi_1 - Z\xi_1 + \zeta), \xi \rangle \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{t} \left( t \langle Z\xi_0, e^{tX}\xi \rangle + \underbrace{\langle e^{-tX} (Ze^{tX}\xi_1 - Z\xi_1 + \zeta), \xi \rangle}_{\text{ist beschränkt}} - \text{konst} \right) \\ &= \langle Z\xi_0, e^{tX}\xi_1 \rangle + \frac{1}{t} \cdot \text{Beschränktes} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Also ist  $Z\xi_0 \in \text{Kern}(X)$ , da  $\text{Span}\{e^{tX}X\xi_1; t \in \mathbb{R}\} = \text{Bild}(X)$  ist. Für unsere durch das Jacobifeld  $\vec{Y}$  gewonnene Lösung  $\left(\frac{A|\alpha}{0|0}\right)$  wissen wir dies auch schon. Damit ist (3.4) äquivalent zu

$$\langle e^{-tX}Ze^{tX}\xi_1 + e^{-tX}(-Z\xi_1 + \zeta), \xi \rangle \equiv \text{konst für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und } Z\xi_0 \in \text{Kern}(Z) \quad (3.4 \star)$$

**Proposition 3.14:** Es seien  $\vec{Y}, \vec{Z} \in J^\perp(\gamma)$  orthogonale Vektorfelder längs  $\gamma$  mit  $\vec{Y}(t) = A\gamma(t) + \alpha$  und  $\vec{Z}(t) = B\gamma(t) + \beta$ . Dann erfüllen die Matrizen  $\left(\frac{A|\alpha}{0|0}\right), \left(\frac{B|\beta}{0|0}\right)$  und  $\left(\frac{[A, B]|\alpha\beta - B\alpha}{0|0}\right) \in \mathfrak{so}(N) \ltimes \mathbb{R}^N$ ,  $i \in \{1; 2\}$ , die lineare Gleichung (3.4)

$$\left\langle e^{-t\left(\frac{X|\xi}{0|0}\right)} \left(\frac{Z|\zeta}{0|0}\right) e^{t\left(\frac{X|\xi}{0|0}\right)} \left(\frac{0}{1}\right), \left(\frac{\xi}{1}\right) \right\rangle \equiv \text{konst.}$$

Für die  $\left(\frac{A|\alpha}{0|0}\right), \left(\frac{B|\beta}{0|0}\right)$  ist die Konstante der rechten Seite gleich 0.

**Beweis:**  $\vec{Y}$  und  $\vec{Z}$  erfüllen diese beiden die Wronskibedingung Proposition 2.3. Es gilt  $\left(\frac{A|\alpha}{0|0}\right) \left(\frac{X|\xi}{0|0}\right) = \left(\frac{A|0}{0|0}\right) \left(\frac{X|\xi}{0|0}\right)$  und daher

$$\begin{aligned} \text{konst} &= \langle \vec{Y}'(t), \vec{Z}(t) \rangle - \langle \vec{Y}(t), \vec{Z}'(t) \rangle \\ &= \left\langle \left(\frac{X|\xi}{0|0}\right) \vec{\gamma}(t), \left(\frac{-AB|-A\beta}{0|0}\right) \vec{\gamma}(t) \right\rangle - \left\langle \left(\frac{X|\xi}{0|0}\right) \vec{\gamma}(t), \left(\frac{-BA|-B\alpha}{0|0}\right) \vec{\gamma}(t) \right\rangle \\ &= - \left\langle e^{-t\left(\frac{X|\xi}{0|0}\right)} \left(\frac{[A, B]|\alpha\beta - B\alpha}{0|0}\right) e^{t\left(\frac{X|\xi}{0|0}\right)} \left(\frac{0}{1}\right), \left(\frac{\xi}{1}\right) \right\rangle. \end{aligned}$$

□

**Lösung von (3.4):** Eine allgemeine Lösung in  $\mathfrak{so}(N) \ltimes \mathbb{R}^N$  von (3.4) lautet:

$$z := \left(\frac{Z|\zeta}{0|0}\right) = \left( \begin{array}{c|c|c|c} \tilde{Z}_0 & \tilde{z} & \tilde{Z} & \tilde{\zeta}_2 \\ \hline -\tilde{z}^T & 0 & 0 & \tilde{\zeta}_0 \\ \hline -\tilde{Z}^T & 0 & \tilde{Z}_1 & \tilde{\zeta}_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \} \text{Kern}(X) \cap (\text{Span}\{\xi_0\})^\perp \\ \} \text{Span}\{\xi_0\} \\ \} \text{Bild}(X) \end{array}$$

Wir werden in Lemma 3.15 sehen, dass  $\tilde{Z}_1$  und  $\tilde{\zeta}_1$  weitere Bedingungen erfüllen müssen. Sie lässt sich als Summe dreier verschiedener Lösungen ansehen.

(i) Ist  $\mathcal{Z}$  von der Form

$$\mathcal{Z} = \left( \begin{array}{c|c|c|c} \tilde{Z}_0 & \tilde{z} & \tilde{Z} & 0 \\ \hline -\tilde{z}^T & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\tilde{Z}^T & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

so ist  $e^{-tX} Z e^{tX} \xi_1 + e^{-tX} (\zeta - Z \xi_1) = Z e^{tX} \xi_1 + Z \xi_1 \perp \text{Bild}(X) \oplus \text{Span}\{\xi_0\}$  und somit  $\mathcal{Z}$  eine Lösung zur Konstanten 0.

(ii) Ist  $\mathcal{Z}$  von der Form

$$\mathcal{Z} = \left( \begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & \tilde{\zeta}_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \tilde{\zeta}_0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

so ist  $\langle e^{-tX} Z e^{tX} \xi_1 + e^{-tX} (\zeta - Z \xi_1), \xi \rangle = \langle \zeta, \xi \rangle$  und  $\mathcal{Z}$  eine Lösung zur Konstanten  $\tilde{\zeta}_0 \|\xi_0\|$ .

(iii)  $\mathcal{Z}$  ist mit zusätzlichen Bedingungen, siehe Lemma 3.15, von der Form

$$\left( \begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \tilde{Z}_1 & \tilde{\zeta}_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Es seien  $\vec{Y}, \vec{Z} \in J(\gamma)$  wie oben gegeben durch  $\vec{Y}(t) = A\gamma(t) + \alpha$  und  $\vec{Z}(t) = B\gamma(t) + \beta$ . Wir hatten gezeigt, dass  $\left( \begin{array}{c|c} A & \alpha \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$  und  $\left( \begin{array}{c|c} B & \beta \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$  Summen der Formen aus (i) und (ii) sind. Ferner ist  $\left( \begin{array}{c|c} [A, B] & A\beta - B\alpha \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$  ebenfalls eine Lösung von (3.4) mit

$$\begin{aligned} [A, B] &= \left( \begin{array}{c|c|c} 0 & \tilde{a} & \tilde{A} \\ \hline -\tilde{a}^T & 0 & 0 \\ \hline -\tilde{A}^T & 0 & 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c|c} 0 & \tilde{b} & \tilde{B} \\ \hline -\tilde{b}^T & 0 & 0 \\ \hline -\tilde{B}^T & 0 & 0 \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c|c|c} * & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\tilde{b}^T \tilde{a} & -\tilde{b}^T \tilde{A} \\ \hline 0 & -\tilde{B}^T \tilde{a} & -\tilde{B}^T \tilde{A} \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{c|c|c} * & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \tilde{b}^T \tilde{A} - \tilde{a}^T \tilde{B} \\ \hline 0 & \tilde{B}^T \tilde{a} - \tilde{A}^T \tilde{b} & \tilde{B}^T \tilde{A} - \tilde{A}^T \tilde{B} \end{array} \right) \begin{array}{l} \} \text{Kern}(X) \cap (\text{Span}\{\xi_0\})^\perp \\ \} \text{Span}\{\xi_0\} \\ \} \text{Bild}(X) \end{array} \end{aligned}$$

und

$$A\beta - B\alpha = \left( \begin{array}{c|c|c} 0 & \tilde{a} & \tilde{A} \\ \hline -\tilde{a}^T & 0 & 0 \\ \hline -\tilde{A}^T & 0 & 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \tilde{\beta} \\ \hline 0 \\ \hline 0 \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} 0 \\ \hline -\tilde{b}^T \tilde{\alpha} \\ \hline -\tilde{B}^T \tilde{\alpha} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} 0 \\ \hline \tilde{b}^T \tilde{\alpha} - \tilde{a}^T \tilde{\beta} \\ \hline \tilde{B}^T \tilde{\alpha} - \tilde{A}^T \tilde{\beta} \end{array} \right).$$

Wir sehen sofort

$$\tilde{B}^T \tilde{a} - \tilde{A}^T \tilde{b} = 0. \quad (3.6)$$

Wir betrachten nun Fall (iii). Zur Übersichtlichkeit nehmen wir an, dass  $\text{Kern}(X) = \{0\}$  und  $\mathbb{R}^N = \text{Bild}(X) = \mathbb{R}^{2k}$  gilt. Daher sei  $X$  im Folgenden invertierbar. Wir schreiben  $\mathcal{X} = \left( \begin{smallmatrix} X & \xi \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right)$  und  $\mathcal{Z} = \left( \begin{smallmatrix} Z & \zeta \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right)$ . Zur linearen Gleichung (3.4) ist

$$0 = \frac{d^\nu}{dt^\nu} \Big|_{t=0} \langle e^{-t \text{ad} \mathcal{X}} \mathcal{Z} \left( \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \left( \begin{smallmatrix} \xi \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \rangle = \langle (\text{ad} \mathcal{X})^\nu \mathcal{Z} \left( \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \left( \begin{smallmatrix} \xi \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \rangle \quad \text{für alle } \nu \in \mathbb{N} \quad (3.7)$$

äquivalent. Ist also  $\mathcal{Z}$  eine Lösung zu beliebiger Konstanten, so ist  $\text{ad} \mathcal{X}(\mathcal{Z})$  ebenfalls eine Lösung ist und zwar zur Konstanten 0.

**Lemma 3.15:** *Es gibt einen  $\text{ad} X$ -invarianten Untervektorraum  $\mathfrak{K} \leq \mathfrak{so}(N)$  und eine lineare Abbildung  $\sigma : \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{so}(N)$ , die  $\sigma(\text{ad} X Z) = X \sigma(Z) - Z \xi$  erfüllt, so dass der Lösungsraum  $\mathfrak{l}$  von (3.4)  $\text{ad} \left( \begin{smallmatrix} X & \xi \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right)$ -invariant ist und Folgendes gilt:*

$$\mathfrak{l} := \left\{ \left( \begin{smallmatrix} Y & \sigma(Y) \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) ; Y \in \mathfrak{K} \right\}$$

**Bemerkung 3.16:** In Lemma 3.17 werden wir  $\text{Kern}(\text{ad} X) \subset \mathfrak{K}$  sehen.

**Beweis:** Wir haben gezeigt, dass  $\mathfrak{l}$  ein  $\text{ad} \mathcal{X}$ -invarianter Unterraum von  $\text{Lie}(\text{Isom}(\mathbb{R}^N))$  ist. Offenbar ist damit

$$\mathfrak{K} := \text{Bild} \left( \mathfrak{l} \rightarrow \mathfrak{so}(N), \left( \begin{smallmatrix} Z & \zeta \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) \mapsto Z \right)$$

ein  $\text{ad} X$ -invarianter Unterraum von  $\mathfrak{so}(N)$ . Es seien  $\left( \begin{smallmatrix} Z & \zeta \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right), \left( \begin{smallmatrix} Z & \eta \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) \in \mathfrak{l}$ . Dann ist auch  $\left( \begin{smallmatrix} 0 & \zeta - \eta \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) \in \mathfrak{l}$ . Durch eine Induktion schließen wir  $(\text{ad} \mathcal{X})^\nu \left( \begin{smallmatrix} 0 & \zeta - \eta \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) = \left( \begin{smallmatrix} 0 & X^\nu(\zeta - \eta) \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right)$  für alle  $\nu \in \mathbb{N}$  und daraus

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (\text{ad} \mathcal{X})^\nu \left( \begin{smallmatrix} 0 & \zeta - \eta \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) \left( \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \left( \begin{smallmatrix} X \xi_1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \rangle = \langle \left( \begin{smallmatrix} 0 & X^\nu(\zeta - \eta) \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) \left( \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \left( \begin{smallmatrix} X \xi_1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \rangle \\ &= \langle X^\nu(\zeta - \eta), X \xi_1 \rangle = (-1)^\nu \langle (\zeta - \eta), X^{\nu+1} \xi_1 \rangle \end{aligned}$$

und somit  $\zeta - \eta \in \text{Kern}(X) = \{0\}$ . Ist also  $\left( \begin{smallmatrix} Z & \zeta \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right)$  eine Lösung, so ist  $\zeta$  durch  $Z$  eindeutig festgelegt und wir erhalten eine wohldefinierte Abbildung  $\sigma : \mathfrak{K} \rightarrow \mathbb{R}^N$ , so dass  $\left( \begin{smallmatrix} Z & \sigma(Z) \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) \in \mathfrak{l}$  gilt.  $\sigma$  ist linear, da (3.7) eine lineare Gleichung ist. □

Ein mögliches  $\sigma$  ist gegeben durch  $\sigma_0(Z) = Z\xi_1$ , denn

$$\sigma(\operatorname{ad}X(Z)) = \sigma([X, Z]) = [X, Z]\xi_1 = XZ\xi_1 - ZX\xi_1 = X\sigma_0(Z) - Z\xi. \quad (3.8)$$

Da  $\operatorname{ad}X : \mathbb{R}^{2k \times 2k} \rightarrow \mathbb{R}^{2k \times 2k}$  eine schiefsymmetrische Funktion bzgl. dem euklidischen Skalarprodukt  $\langle A, B \rangle_{\mathbb{R}^{n \times n}} = \operatorname{Spur}(AB^T)$  ist, zerfällt der  $\operatorname{ad}X$ -invariante Unterraum  $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{so}(2k)$  in die orthogonale Summe  $\mathfrak{K} = \operatorname{Kern}(\operatorname{ad}X) \oplus \mathfrak{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{H}_l$ , wobei die  $\mathfrak{H}_\lambda$  zweidimensionale  $\operatorname{ad}X$ -invariante Teilräume dergestalt sind, dass wir eine Basis  $Z_0^\lambda, Z_1^\lambda \in \mathfrak{H}_\lambda$  und ein  $\varphi_\lambda \in \mathbb{R}^+$  finden, so dass

$$\operatorname{ad}X(Z_0^\lambda) = \varphi_\lambda Z_1^\lambda \quad \text{und} \quad \operatorname{ad}X(Z_1^\lambda) = -\varphi_\lambda Z_0^\lambda$$

gilt und  $-\varphi_\lambda^2 \in \mathbb{R}^-$  ein Eigenwert von  $(\operatorname{ad}X)^2$  ist.

**Lemma 3.17:** *Es gilt  $\sigma(Z) = Z\xi_1 + c(Z)$  mit einer linearen Abbildung  $c : \mathfrak{K} \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$ , die Folgendes erfüllt:*

- (i)  $c(Z) = 0$ , falls  $Z \in \operatorname{Kern}(\operatorname{ad}X)$ , oder
- (ii)  $X^2c(Z) = -\varphi_\lambda^2 c(Z)$ , falls  $Z \in \mathfrak{H}_\lambda$ . Es gilt weiter  $Xc(Z_0^\lambda) = \varphi_\lambda c(Z_1^\lambda)$  und  $Xc(Z_1^\lambda) = -\varphi_\lambda c(Z_0^\lambda)$  und  $c(\mathfrak{H}_\lambda)$  ist  $X$ -invariant.

**Bemerkung 3.18:** In (ii) haben wir nicht vorausgesetzt, dass  $-\varphi_\lambda^2$  ein Eigenwert von  $X^2$  ist. Ist  $-\varphi_\lambda^2$  kein Eigenwert von  $X^2$ , so ist  $c|_{\mathfrak{H}_\lambda} \equiv 0$ . Des Weiteren gilt (ii) für jede beliebige Zerlegung von  $\mathfrak{K}$  in  $\operatorname{ad}X$ -invariante Teilräume.

**Beweis:** Ad (i): Sei  $Z \in \operatorname{Kern}(\operatorname{ad}X)$ , dann gilt  $0 = \sigma(\operatorname{ad}X(Z)) = X\sigma(Z) - ZX\xi_1 = X\sigma(Z) - ZX\xi_1$ . Da  $X$  injektiv ist, folgt die Behauptung.

Ad (ii): Wir berechnen

$$c(\operatorname{ad}X(Z)) = \sigma(\operatorname{ad}X(Z)) - \operatorname{ad}X(Z)\xi_1 = X\sigma(Z) - ZX\xi_1 - XZ\xi_1 + ZX\xi_1 = Xc(Z)$$

und betrachten  $\mathfrak{H}_\lambda$  wie oben mit  $j \in \mathbb{Z}_2$  und  $c_j := c(Z_j^\lambda)$  und erhalten

$$Xc_j = c(\operatorname{ad}X(Z_j^\lambda)) = c((-1)^j \varphi_\lambda Z_{j+1}^\lambda) = (-1)^j \varphi_\lambda c_{j+1}.$$

Insbesondere folgt  $X^2c_j = -\varphi_\lambda^2 c_j$ .

□

Nun seien  $\mathfrak{H}$  durch  $\mathfrak{K} = \operatorname{Kern}(\operatorname{ad}X) \oplus \mathfrak{H}$  definiert sowie  $\varrho := \mathfrak{so}(n) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\varrho(Z) = \langle Z\xi_1, \xi \rangle$  und  $\mathfrak{v} := \operatorname{Kern}(\varrho) = \{Z \in \mathfrak{so}(n); \langle Z\xi_1, \xi \rangle = 0\}$ . Wir betrachten den Untervektorraum  $\mathfrak{m} := \mathfrak{H} \cap \mathfrak{v}$ .

**Lemma 3.19:** (i) Es sei  $Z \in \mathfrak{H}$ . Dann ist die Konstante in (3.4) gleich 0.

(ii)  $\mathfrak{m}$  ist der maximale  $\text{ad}X$ -invariante Unterraum von  $\mathfrak{v}$  und es ist  $\sigma(Z) = Z\xi_1$  für alle  $Z \in \mathfrak{m}$ .

(iii) Es gilt  $\mathfrak{m} = \left( \sum_{j=0}^{\infty} (\text{ad}X)^j (X\xi_1\xi_1^T + \xi_1\xi_1^T X) \right)^{\perp_{\mathfrak{so}(2k)}}$ .

**Beweis:** Ad (i): Da  $\mathfrak{H}$  in eine orthogonale direkte Summe aus zweidimensionalen,  $\text{ad}X$ -invarianten Eigenräumen zerfällt, genügt es, die Behauptung für alle  $Z \in \mathfrak{R}'$  mit  $\text{ad}X^2(Z) = -\varphi^2 Z$  zu zeigen. Sei  $Z$  ein solches und  $\begin{pmatrix} Z & \xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{l}$  eine Lösung zur Konstanten  $C$ . Nach (3.7) und Lemma 3.15 ist auch  $\left( \text{ad} \begin{pmatrix} X & \xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^2 \begin{pmatrix} Z & \xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{l}$  mit

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \left( \text{ad} \begin{pmatrix} X & \xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^2 \begin{pmatrix} Z & \xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{0} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \text{ad}X^2 Z & \sigma(\text{ad}X^2 Z) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{0} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} -\varphi^2 Z & -\varphi^2 \sigma(Z) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{0} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -\varphi^2 \left\langle \begin{pmatrix} Z & \xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{0} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = C. \end{aligned}$$

Ad (ii): Wir zeigen zunächst, dass  $\sigma(Z) = Z\xi_1$  für alle  $Z \in \mathfrak{m}$  gilt. Auch hier genügt es die  $Z \in \mathfrak{m}$  mit  $\text{ad}X^2(Z) = -\varphi^2 Z$  und  $\|Z\| = 1$  zu betrachten. Dann bilden  $Z$  und  $W := \frac{1}{\varphi} \text{ad}X(Z)$  eine Orthonormalbasis des  $\text{ad}X$ -invarianten Teilraumes  $\text{Span}\{Z, W\}$ . Nach (i) ist  $0 = \langle \sigma(Z), \xi \rangle = \langle Z\xi_1 + c(Z), \xi \rangle = \langle c(Z), \xi \rangle$  und ebenso  $0 = \langle c(W), \xi \rangle$ . Aus Lemma 3.17 folgt, dass  $\text{Span}\{c(Z), c(W)\}$  ein  $X$ -invarianter Teilraum ist. Nun ist  $\{X^\nu \xi_1; \nu \in \underline{2k}\}$  eine Basis von  $\mathbb{R}^{2k}$ . Also ist  $c(Z) = c(W) = 0$ . Wir sehen also, dass  $\sigma(Z) = Z\xi_1$  für alle  $Z \in \mathfrak{m}$  gilt.

Nun sei  $\mathfrak{v}' \leq \mathfrak{v}$  der maximale  $\text{ad}X$ -invariante Unterraum. Sei  $\tilde{\sigma} : \mathfrak{v}' \rightarrow \mathbb{R}^{2k}, Z \mapsto Z\xi_1$ . Für alle  $\nu \in \underline{\mathbb{N}_0}$  gilt

$$\begin{aligned} &\left\langle \left( \text{ad} \begin{pmatrix} X & \xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^\nu \begin{pmatrix} Z & \tilde{\sigma}(Z) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{0} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &\stackrel{\text{wie (3.8)}}{=} \left\langle \begin{pmatrix} \text{ad}X^\nu Z & \tilde{\sigma}(\text{ad}X^\nu Z) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{0} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle (\text{ad}X^\nu Z)\xi_1, \xi \rangle \stackrel{\mathfrak{v}' \text{ ad}X\text{-inv.}}{=} 0. \end{aligned}$$

Also ist  $\begin{pmatrix} Z & \tilde{\sigma}(Z) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{l}$  eine Lösung von (3.4).

Ad (iii): Es sei  $Z \in \mathfrak{so}(N)$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} \langle \text{ad}X^j(Z)\xi_1, X\xi_1 \rangle &= \xi_1^T (-\text{ad}X^j(Z)) X\xi_1 = -\text{Spur}(\text{ad}X^j(Z)X\xi_1\xi_1^T) \\ &= \langle \text{ad}X^j(Z), X\xi_1\xi_1^T \rangle_{\mathbb{R}^{n \times n}} = -\frac{1}{2} \langle \text{ad}X^j(Z), X\xi_1\xi_1^T + \xi_1\xi_1^T X \rangle_{\mathbb{R}^{n \times n}} \\ &= (-1)^{j+1} \cdot \frac{1}{2} \langle Z, \text{ad}X^j(X\xi_1\xi_1^T + \xi_1\xi_1^T X) \rangle_{\mathbb{R}^{n \times n}}. \end{aligned}$$

Nun gilt  $Z \in \mathfrak{m}$  genau dann, wenn  $\langle \text{ad}X^j(Z)\xi_1, X\xi_1 \rangle = 0$  ist für alle  $j \in \mathbb{N}_0$ . Dies gilt also genau dann, wenn  $Z \in \left( \text{ad}X^j(X\xi_1\xi_1^T + \xi_1\xi_1^T X) \right)^{\perp_{\mathfrak{so}(2k)}}$  ist für alle  $j \in \mathbb{N}_0$ . □

Also zerfällt  $\mathfrak{K}$  in die direkte orthogonale Summe  $\mathfrak{K} = \text{Kern}(\text{ad}X) \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{H}_l$ , wobei die  $\mathfrak{H}_1, \dots, \mathfrak{H}_l$  zweidimensionale,  $\text{ad}X$ -invariante (oder triviale) Vektorräume zu den Eigenwerten  $-\varphi_\lambda^2$  von  $\text{ad}X^2$  mit  $\text{ad}X^2|_{\mathfrak{H}_\lambda} = -\varphi_\lambda^2 \text{Id}_{\mathfrak{H}_\lambda}$  sind.

**Lemma 3.20:** *Diese Eigenwerte  $-\varphi_1^2 < \dots < -\varphi_l^2$  sind paarweise verschieden und Eigenwerte von  $X^2$ .*

*Beweis:* Angenommen es ist  $-\varphi_{\lambda_1}^2 = -\varphi_{\lambda_2}^2$ . Dann setzen wir  $\mathfrak{w} = \mathfrak{H}_{\lambda_1} \oplus \mathfrak{H}_{\lambda_2}$ . Es ist  $\mathfrak{w} \cap \mathfrak{m} = \{0\}$  und damit  $4 \neq \dim(\text{Kern}(\varrho|_{\mathfrak{w}})) \geq 3$ . Es sei  $Z \in (\text{Kern}(\varrho|_{\mathfrak{w}}))^\perp$ . Dann ist  $\mathfrak{w} = \text{Span}\{Z, \text{ad}XZ\} \oplus \mathfrak{w}_1$  und  $\mathfrak{w}_1 \subset \mathfrak{w} \cap \mathfrak{m} = \{0\}$  ist ein zweidimensionaler,  $\text{ad}X$ -invarianter Teilraum, ein Widerspruch.

Wäre nun  $-\varphi_\lambda^2$  kein Eigenwert von  $X^2$ , so wäre nach Lemma 3.17  $\sigma(Z) = Z\xi_1$  für alle  $Z \in \mathfrak{H}_\lambda$ . Nach Lemma 3.19 ist  $\varrho(Z) = \langle Z\xi_1, \xi \rangle = 0$  und damit  $\mathfrak{H}_\lambda \leq \mathfrak{v}$ . Dies ist ein Widerspruch zu  $\mathfrak{H}_\lambda \cap \mathfrak{m} = \{0\}$ . □

**Satz 3.21:** *Es seien  $-\varphi_1^2 < \dots < -\varphi_l^2$  gemeinsame Eigenwerte von  $\text{ad}X^2$  und  $X^2$ . Dann gilt*

$$\mathfrak{K} = \text{Kern}(\text{ad}X) \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{H}_l,$$

wobei  $\mathfrak{m} = \left( \sum_{j=0}^{\infty} (\text{ad}X)^j (X\xi_1\xi_1^T + \xi_1\xi_1^T X) \right)^{\perp_{\mathfrak{so}(2k)}}$  der maximale  $\text{ad}X$ -invariante Teilraum in  $\{Z \in \mathfrak{so}(n); \langle Z\xi_1, \xi \rangle = 0\}$  ist und  $\mathfrak{H}_\lambda$  ein zweidimensionaler,  $\text{ad}X$ -invarianter (oder trivialer) Teilraum mit  $\text{ad}X|_{\mathfrak{H}_\lambda} = -\varphi_\lambda^2 \text{Id}_{\mathfrak{H}_\lambda}$  für alle  $\lambda \in \underline{l}$ . Für alle  $Z \in \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{H}_l$  ist die Konstante in (3.4) zur Lösung  $\begin{pmatrix} Z & \xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  gleich 0.

Es gilt  $\sigma(Z) = Z\xi_1$  für alle  $Z \in \text{Kern}(\text{ad}X) \oplus \mathfrak{m}$ .

Es seien  $Z_0^\lambda, Z_1^\lambda \in \mathfrak{H}_\lambda$  und  $e_0^\lambda, e_1^\lambda \in \{\zeta \in \mathbb{R}^n; X^2\zeta = -\varphi_\lambda^2\zeta\}$  Orthonormalbasen mit  $Z_1^\lambda = \frac{1}{\varphi_\lambda} \text{ad}X(Z_0^\lambda)$  sowie  $e_1^\lambda = \frac{1}{\varphi_\lambda} X e_0^\lambda$  und es gelte  $0 = \langle Z_0^\lambda \xi_1, \xi \rangle = \langle e_0^\lambda, \xi \rangle$  sowie  $0 < \langle Z_1^\lambda \xi_1, \xi \rangle, \langle e_1^\lambda, \xi \rangle$ . Dann gilt  $\sigma(Z_j^\lambda) = Z_j^\lambda \xi_1 + \frac{\langle Z_1^\lambda \xi_1, \xi \rangle}{\langle e_1^\lambda, \xi \rangle} e_j^\lambda$ .

*Beweis:* Nach den vorangegangenen Lemmata bleibt nur noch zu zeigen, dass  $\sigma|_{\mathfrak{H}_\lambda}$  die genannte Form hat. Seien also  $Z_0, Z_1 \in \mathfrak{H}_\lambda$  eine Orthonormalbasis, so dass  $0 = \varrho(Z_0) = \langle Z_0^\lambda \xi_1, \xi \rangle$  gilt. Dann ist  $Z_1 = \frac{1}{\varphi_\lambda} \text{ad}X(Z_0)$ . Seien weiter  $e_0, e_1 \in \mathbb{R}^{2k}$  eine Orthonormalbasis des  $-\varphi_\lambda^2$ -Eigenraumes von  $X^2$  mit  $\langle e_0, \xi \rangle = 0$  und  $e_1 = \frac{1}{\varphi_\lambda} X e_0$ . Ohne Einschränkung seien  $\varrho(Z_1) > 0$  und  $\langle e_1, \xi \rangle > 0$ .

Nach Lemma 3.17 ist  $\sigma(Z_j) = Z_j \xi_1 + c_j$ , wobei  $Xc_0 = \varphi_\lambda c_1$  und  $Xc_1 = -\varphi_\lambda c_0$  ist. Ferner gilt nach Lemma 3.19, dass  $0 = \langle \sigma(Z_0), \xi \rangle = \langle \varrho(Z_0) + c_0, \xi \rangle = \langle c_0, \xi \rangle$  ist, also  $c_j \in \text{Span}\{e_j\}$ . Ebenso ist  $0 = \langle \sigma(Z_1), \xi \rangle = \langle Z_1 \xi_1 + c_1, \xi \rangle = \langle Z_1 \xi_1, \xi \rangle + \langle c_1, e_1 \rangle \langle e_1, \xi \rangle$ . Folglich ist  $c_1 = -\frac{\langle Z_1 \xi_1, \xi \rangle}{\langle e_1, \xi \rangle}$  und  $c_0 = -\varphi_\lambda X c_1 = -\frac{\langle Z_1 \xi_1, \xi \rangle}{\langle e_1, \xi \rangle} \cdot (-\varphi_\lambda X e_1) = -\frac{\langle Z_1 \xi_1, \xi \rangle}{\langle e_1, \xi \rangle} e_0$ . □



Seien  $Z_0, Z_1 \in \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{h}_l$  orthonormale Matrizen mit  $\text{ad}X(Z_0) = \frac{1}{\varphi}Z_1$  und  $\text{ad}X(Z_1) = -\frac{1}{\varphi}Z_0$ . Nach Lemma 3.15 gilt  $\sigma(\varphi Z_1) = \sigma(\text{ad}X(Z_0)) = X\sigma(Z_0) - Z_0\xi$  und nach Lemma 3.19  $0 = \langle \sigma(\varphi Z_1), \xi \rangle = -\langle \sigma(Z_0), X\xi \rangle$ . Damit folgt

$$\sigma(Z) \perp \text{Span}\{X\xi_1, X^2\xi_1\} \quad \text{für alle } Z \in \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{h}_l.$$

Kennen wir das Spektrum  $-\vartheta_1^2 < \dots < -\vartheta_k^2$  von  $X^2$ , so kennen wir auch das Spektrum von  $(\text{ad}X)^2$ , nämlich  $-(\vartheta_m \pm \vartheta_j)^2$ , wobei  $j < m \in \underline{k}$  sind vgl. [BD85], V.6. Wir stellen

$$X = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & \boxed{\begin{smallmatrix} 0 & -\vartheta_j \\ \vartheta_j & 0 \end{smallmatrix}} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \boxed{\begin{smallmatrix} 0 & -\vartheta_m \\ \vartheta_m & 0 \end{smallmatrix}} & & \\ & & & & \ddots & \end{pmatrix}, \quad \xi_1 = \begin{pmatrix} \vdots \\ x_j \\ 0 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

dar und erhalten

$$V_{jm}^\pm = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & \boxed{\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 0 & \pm 1 \end{smallmatrix}} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \boxed{\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mp 1 \end{smallmatrix}} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad V_j^{m\pm} = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & \boxed{\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 0 & \mp 1 \end{smallmatrix}} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \boxed{\begin{smallmatrix} 0 & \pm 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

mit  $\text{ad}X(V_{jm}^\pm) = (\vartheta_m \pm \vartheta_j)V_j^{m\pm}$  und  $\text{ad}X(V_j^{m\pm}) = -(\vartheta_m \pm \vartheta_j)V_{mj}^{m\pm}$ . Es seien nun  $-\varphi_\lambda^2 = -(\vartheta_m \pm \vartheta_j)^2$  ein Eigenwert<sup>1</sup> von  $\text{ad}X^2$  aber nicht von  $X^2$  und  $\mathfrak{w} \leq \mathfrak{so}(2k)$  der zugehörige, zweidimensionale Eigenraum  $\text{Span}\{V_{jm}^\pm, V_j^{m\pm}\}$ . Angenommen  $\mathfrak{w} \leq \mathfrak{K}$ , so folgt  $\mathfrak{w} \leq \mathfrak{m}$ . Es gilt dann zwar  $\langle V_{jm}^\pm \xi_1, X\xi_1 \rangle = 0$ , jedoch  $\langle V_j^{m\pm} \xi_1, X\xi_1 \rangle = \pm \vartheta_j x_j x_m + \vartheta_m x_m x_j = \pm x_j x_m (\vartheta_m \mp \vartheta_j) \neq 0$ . Dies ist ein Widerspruch zu  $\langle \sigma(Z), X\xi_1 \rangle = 0$ . Es folgt:

**Lemma 3.22:** Falls  $X^2$  und  $\text{ad}X^2$  keine gemeinsamen Eigenwerte besitzen und die vom Kern verschiedenen Eigenräume von  $\text{ad}X^2$  maximal zweidimensional sind, d.h. die  $\vartheta_j, \vartheta_m \pm \vartheta_j$  sind paarweise verschieden, ist  $\mathfrak{K} = \text{Kern}(\text{ad}X)$ .

<sup>1</sup>Da es für die Rechnung unerheblich ist, wollen wir im Folgenden mit  $\pm$  entweder ein festes  $+$  oder  $-$  bezeichnen.

Wir nehmen an, dass  $\mathfrak{K} = \text{Kern}(\text{ad}X) \cong \bigoplus_{\lambda=1}^k \mathfrak{so}(2)$  ist. Dann ist  $\sigma : \mathfrak{K} \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$  bijektiv, denn eine Basis von  $\mathfrak{K}$  ist gegeben durch<sup>2</sup>  $\{X^{2\nu+1}; \nu \in \underline{k}\}$  und eine von  $\text{Bild}(\sigma)$  durch  $\{X^{2\nu+1}\xi_1; \nu \in \underline{k}\}$ . Außerdem gehen wir zurück zu unseren Jacobifeldern und fordern, dass die Geodätische  $\gamma$  beschränkt und nach Bogenlänge parametrisiert ist, also  $\xi_0 = 0$  und  $\|\xi\| = 1$  erfüllt. Da  $\gamma$  ein Normalschnitt in jedem Punkt ist, hatten wir gesehen, dass die Jacobifelder im Normalraum zu  $\text{Bild}(X) \oplus \text{Span}\{\xi_0\}$  leben. Unsere Überlegungen für den  $\text{Bild}(X)$ -Unterraum bleiben gültig, obwohl  $\text{Kern}(X) = \{0\}$  nicht mehr gilt.

Seien  $\vec{Y}_\nu \in J_0^\perp(\gamma)$  und  $\vec{Z}_\nu \in J_1^\perp(\gamma)$ , so dass die  $v_\nu := \vec{Z}(0) \stackrel{!}{=} \frac{D}{dt}\vec{Y}(0)$  zusammen mit  $\dot{\gamma}(0) = \xi = X\xi_1$  eine Orthonormalbasis von  $T_0M$  bilden. Dargestellt seien sie durch  $\vec{Y}_\nu(t) = A_\nu\gamma(t)$  und  $\vec{Z}(t) := B_\nu\gamma(t) + v_\nu$ . Wir erweitern das Frenetbein  $\xi = b_1, \dots, b_{2k} \in \text{Bild}(X)$  in 0 zu einer ONB des  $\mathbb{R}^N$  und stellen  $A = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{A} \\ -\tilde{A}^T & 0 \end{pmatrix}$  sowie  $B = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{B} \\ -\tilde{B}^T & 0 \end{pmatrix}$  und  $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{X} \end{pmatrix}$  in dieser dar. Da  $\gamma$  ein Normalschnitt von  $M$  ist, gilt

$$v_\nu = \frac{D}{dt}\vec{Y}_\nu(0) = \vec{Y}'_\nu(0) = A_\nu\xi \quad \text{und} \quad A_\nu b_j \in \nu_0 M \text{ für } j \geq 2, \quad (3.9)$$

denn eine Variation  $F = S \circ \gamma$  aus Geodätischen,  $S \in \text{Isom}(\mathbb{R}^N)$  mit Variationsfeld  $\vec{Y}_\nu$  hält  $\gamma(0) = 0$  fest und dreht das Frenetbein derart, dass die  $S_u(\xi) \in T_0M$  und die  $S_u(b_2), \dots, S_u(b_n) \in \nu_0 M$  bleiben, also  $A\xi = \frac{d}{du}|_{u=0}S_u(\xi) \in T_0M$  sowie  $A_\nu b_j = \frac{d}{du}|_{u=0}S_u(b_j) \in \nu_{\gamma(0)}M$ .

**Lemma 3.23:** *Unter diesen Annahmen gilt  $[A_\nu, A_\mu] = \begin{pmatrix} \star & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  ferner  $[B_\nu, B_\mu] = \begin{pmatrix} \star & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  und  $[B_\mu, A_\nu] = \begin{pmatrix} \star & 0 \\ 0 & \delta_\nu^\mu \tilde{X} \end{pmatrix}$ , wobei  $\delta_\nu^\mu$  das Kroneckerdelta bezeichne. Für alle  $\nu \in \underline{n}$  sind  $\xi$  und  $v_\nu$  Eigenvektoren von  $A_\nu^2$  mit Eigenwert  $-1$ . Alle anderen  $v_\mu \neq v_\nu$  liegen in  $\text{Kern}(A_\nu^2)$ .*

**Beweis:** Es gilt  $\left[ \begin{pmatrix} A_\nu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_\mu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} [A_\nu, A_\mu] & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Also ist  $\sigma(-\tilde{A}_\nu^T \tilde{A}_\mu + \tilde{A}_\mu^T \tilde{A}_\nu) = 0$  und  $\sigma$  ist bijektiv. Weiter gilt  $\left[ \begin{pmatrix} A_\nu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_\mu & v_\mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} [A_\nu, B_\mu] & A_\nu v_\mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Wir können mit (3.9) damit  $\tilde{A}_\nu$  genauer schreiben durch

$$A_\nu = \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & \vec{e}_\nu & 0 \\ \hline 0 & \vec{e}_\nu^T & 0 & 0 \\ -\star^T & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \} \nu_0 M \cup \text{Kern}(X) \\ \} T_0 M \cup \text{Kern}(X) = \text{Span}\{v_1, \dots, v_n\} \\ \} T_0 M \cup \text{Bild}(X) = \text{Span}\{\xi\} \\ \} \nu_0 M \cup \text{Bild}(X) = \text{Span}\{b_2, \dots, b_{2k}\} \end{array}$$

<sup>2</sup>Matrizen aus  $\mathfrak{K}$  haben diagonale Blockgestalt aus  $k$   $(2 \times 2)$ -Blöcken. Wir kennen daher eine Basis aus Eigenvektoren  $\{v_j; j \in \underline{k}\}$ , so dass jeweils der  $j$ -te Block  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  lautet. Dann ist  $X^{2\nu+1} = \sum_{j=1}^k (-1)^\nu (\vartheta_j)^{2\nu+1} v_j$  und die Basistransformationsmatrix ist eine Van-der-Monde-Matrix mit Determinante  $-\prod_\nu \vartheta_\nu \prod_{j < m} (\vartheta_m^2 - \vartheta_j^2) \neq 0$ .

mit den Einheitsvektoren  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ . Wir sehen sofort, dass wegen

$$A_\nu A_\mu = \left( \begin{array}{c|c|c} \star & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\vec{e}_\nu \vec{e}_\mu^T & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\delta_\nu^\mu & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \star \end{array} \right)$$

$\xi$  ein Eigenvektor von  $A_\nu^2$  zum Eigenwert 1 ist. Weiterhin ist  $A_\nu v_\mu = -\delta_\nu^\mu \xi$ . Schließlich ist  $\sigma(-\tilde{A}_\nu^T \tilde{B}_\mu + \tilde{B}_\mu^T \tilde{A}_\nu) = A_\nu v_\mu$ . Da  $\sigma$  bijektiv ist, folgt  $[B_\nu, A_\mu]|_{\text{Bild}(X)} = \delta_\nu^\mu X$ .

Zuletzt betrachten wir  $\left[ \left( \begin{array}{c|c} B_\nu & v_\nu \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c|c} B_\mu & v_\mu \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \right] = \left( \begin{array}{c|c} [B_\nu, B_\mu] & B_\nu v_\mu - B_\mu v_\nu \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$  und

$$\begin{aligned} B_\nu v_\mu - B_\mu v_\nu &= (B_\nu A_\mu - B_\mu A_\nu)\xi = (A_\mu B_\nu - X - (A_\nu B_\mu - X))\xi \\ &\stackrel{\text{s.u.}}{=} \frac{1}{2}(A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu)X\xi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \star & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \xi = 0. \end{aligned}$$

Folglich ist  $\sigma(-\tilde{B}_\nu^T \tilde{B}_\mu + \tilde{B}_\mu^T \tilde{B}_\nu) = 0$ , ferner  $\sigma$  injektiv.

Zu zeigen bleibt  $B_\nu \xi = \frac{1}{2} A_\nu X \xi$ :

Ohne Einschränkung betrachten wir  $\nu = 1$ . Die Taylorentwicklungen von nahe 0 lauten  $A_\nu(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A_\nu X^j \xi_1 = t v_\nu + \frac{1}{2} t^2 A X \xi + o(t^3)$  und  $B_1(t) = v_1 + t B_1 X \xi_1 + o(t^2)$ . Des Weiteren sind  $\vec{Z}_1(t), \vec{Y}_1(t), \dots, \vec{Y}_n(t) \in T_{\gamma(t)} M$  linear abhängig. Wir erhalten also mit

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \vec{Z}_1(t) \wedge \vec{Y}_1(t) \wedge \dots \wedge \vec{Y}_n(t) \\ &= t^{n+1} \cdot \left( v_1 \wedge \frac{1}{2} A_1 X \xi \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_n + B_1 \xi \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_n \right) + o(t^{n+2}) \\ &= t^{n+1} \cdot \left( B_1 \xi - \frac{1}{2} A_1 X \xi \right) \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_n + o(t^{n+2}) \end{aligned}$$

einerseits, dass  $(B_1 \xi - \frac{1}{2} A_1 X \xi) \in T_0 M$  gilt. Andererseits ist  $B_1 \xi = B_1 \dot{\gamma}(0) = \frac{d}{dt} \vec{Z}(0) \in \nu_0 M$ , da  $\vec{Z} \in J_1^\perp(\gamma)$  und  $X \xi \in \text{Span}\{b_2, \dots, b_{2k}\} \leq \nu_0 M$ , also  $A X \xi \in \nu_0 M$  ist. Folglich gilt  $B_1 \xi - \frac{1}{2} A_1 X \xi = 0$ .

□



## 4 Schraubenflächen

Nach Sakamoto ist jede kompakte Schraubenmannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^N$  mit  $\dim(M) = n$  eine Blaschkemannigfaltigkeit [Sak86b]. Insbesondere bedeutet dies, dass alle Geodätischen einfach geschlossen mit gemeinsamer Periode sind, und, wenn  $n = 2$  oder  $n$  ungerade ist, dass  $M$  isometrisch zu einer Sphäre oder einem reellprojektiven Raum ist. Wir wollen dennoch den Fall  $n = 2$  betrachten, da hier die Ideen des folgenden Kapitels einfacher dargestellt werden können. Ferner geben wir zuletzt einen neuen Beweis für einen Satz von Y. Nikolayevsky.

**Satz 4.1** (Vgl. [Nik00]): *Eine kompakte Fläche  $M \subset \mathbb{R}^N$  mit einfachen Geodätischen, also deren Geodätische Schraubenlinien sind, hat konstante Gaußkrümmung.*

**Bemerkung 4.2:** Auf einer Fläche mit einfachen Geodätischen sind Geodätische Schraubenlinien, im Allgemeinen jedoch nicht kongruent. Nikolayevsky gibt ein Beispiel für eine nicht helikale Fläche mit einfachen Geodätischen, siehe [Nik00].

Es sei  $M \subset \mathbb{R}^N$  eine kompakte Schraubenmannigfaltigkeit der Dimension 2 und  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  eine geschlossene Geodätische in  $M$  mit Periode  $2\pi$ . Sie ist im Allgemeinen nur proportional zur Bogenlänge parametrisiert. Weiter sei  $\vec{Y} \in J_0^\perp(\gamma)$  ein nicht verschwindendes Jacobifeld längs  $\gamma$ . Ferner sei, sofern nicht anders gewählt, stets  $t \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $\vec{Y}(t) = A\gamma(t) + \alpha$  mit geeigneten  $A \in \mathfrak{so}(2), \alpha \in \mathbb{R}^N$  ein trigonometrisch polynomialer Vektor. Damit ist  $\|\vec{Y}\|^2$  ein trigonometrisches Polynom. Ein weiteres Jacobifeld  $\vec{Z} \in J^\perp(\gamma)$  ist nach Satz 2.12 gegeben durch

$$\vec{Z}(t) = \vec{Y}(t) \cdot \int_{t_0}^t \|\vec{Y}(s)\|^{-2} ds$$

für  $0 < t_0, t < T := \min\{s \in \mathbb{R}^+; \|\vec{Y}(s)\| = 0\}$ . Andererseits ist auch  $\vec{Z}(t) = B\gamma(t) + \beta$  mit geeigneten  $B \in \mathfrak{so}(2), \beta \in \mathbb{R}^N$  ein trigonometrisch polynomialer Vektor und folglich  $t \mapsto \|\vec{Z}(t)\|^2 = \|\vec{Y}(t)\|^2 \cdot \left( \int_{t_0}^t \|\vec{Y}(s)\|^{-2} ds \right)^2$  ebenso ein trigonometrisches Polynom. Durch das orthogonale Jacobifeld  $\vec{Y}$  lässt sich die Gaußkrümmung längs  $\gamma$  vermöge  $K(\gamma(t)) = -\frac{\|\vec{Y}\|''(t)}{\|\vec{Y}\|^2 \|\vec{Y}\|(t)}$ , berechnen, solange  $\vec{Y}(t) \neq 0$  ist, siehe Proposition 2.4. Wir werden zeigen, dass  $t \mapsto \|\vec{Y}(t)\|$  der Betrag einer Sinusfunktion ist.

In komplexer Schreibweise ist  $\|\vec{Y}(t)\|^2 = \sum_{\nu=-k}^k b_\nu e^{i\nu t} = e^{-ikt} \cdot P(e^{it})$  mit einem Polynom  $P \in \mathbb{C}[z]$  von  $\text{Grad}(P) = 2k$ . Ferner ist  $b_\nu = \overline{b_{-\nu}}$  für alle  $\nu \in \underline{k}_0$ , da  $\|Y(t)\|^2 \in \mathbb{R}$  ist, und  $P(0) = b_{-k} \neq 0$ . Eine Zerlegung in Linearfaktoren sei

$$P(z) = C \cdot \prod_{\nu=1}^d (z - z_\nu)^{m_\nu} \quad (4.1)$$

mit paarweise verschiedenen Nullstellen  $z_\nu \in \mathbb{C}$  der Vielfachheit  $m_\nu$  und  $\sum_{\nu=1}^d m_\nu = 2k$ . Da  $\|\vec{Y}(t)\|^2$  reell ist, ist auch  $z^{-k} \cdot P(z) \in \mathbb{R}$  für alle  $z \in \mathbb{S}^1$ . Sei  $z \in \mathbb{S}^1$ , so ist  $\bar{z} = \frac{1}{z}$  und

$$\begin{aligned} z^{-k} \cdot P(z) &= \overline{z^{-k} \cdot P(z)} = \overline{C} \cdot z^k \cdot \prod_{\nu=1}^d \left( \frac{1}{z} - \bar{z}_\nu \right)^{m_\nu} \\ &= \overline{C} \cdot z^k \cdot \prod_{\nu=1}^d \left( \frac{1}{z^{m_\nu}} (1 - \bar{z}_\nu z)^{m_\nu} \right) = z^{-k} \cdot \overline{C} \cdot \prod_{\nu=1}^d (-\bar{z}_\nu)^{m_\nu} \cdot \prod_{\nu=1}^d \left( z - \frac{1}{\bar{z}_\nu} \right)^{m_\nu}. \end{aligned}$$

Nach dem Identitätssatz, vgl. [FL94], gilt  $P(z) = \overline{C} \cdot \prod_{\nu=1}^d (-\bar{z}_\nu)^{m_\nu} \cdot \prod_{\nu=1}^d \left( z - \frac{1}{\bar{z}_\nu} \right)^{m_\nu}$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Es folgt:

**Lemma 4.3:** *Ist  $z_\nu \in \mathbb{C}$  eine Nullstelle von  $P$ , so ist auch  $\frac{1}{\bar{z}_\nu}$  eine Nullstelle von  $P$  mit derselben Vielfachheit  $m_\nu$ .*

Es sei  $z_0 := e^{it_0}$ . Wir berechnen für  $\vec{Z}(t) = \vec{Y}(t) \cdot \int_{t_0}^t \|\vec{Y}(s)\|^{-2} ds$

$$\|\vec{Z}(t)\|^2 = e^{-ikt} P(e^{it}) \cdot \left( \int_{t_0}^t \frac{e^{iks}}{P(e^{is})} ds \right)^2 = e^{-ikt} P(e^{it}) \cdot \left( \int_{z_0}^{e^{it}} \frac{z^{k-1}}{iP(z)} dz \right)^2.$$

Dabei ist festzustellen, dass das Kurvenintegral zunächst nur auf einer Umgebung von  $\{e^{it}; 0 < t < T\}$  sinnvoll definiert ist, auf der der Integrand holomorph ist. Interessant ist also die Partialbruchzerlegung

$$\frac{z^{k-1}}{i \cdot P(z)} = \sum_{\nu=1}^d \sum_{\mu=1}^{m_\nu} \frac{a_{\nu\mu}}{(z - z_\nu)^\mu}$$

mit  $a_{\nu m_\nu} \neq 0$  für alle  $\nu \in \underline{d}$ . Wegen  $\text{Grad}(P) = 2k > k-1$  gibt es keinen polynomiellen Anteil in der Zerlegung.

**Lemma 4.4:** *Für alle  $\nu \in \underline{d}$  ist  $a_{\nu 1} = 0$ .*

*Beweis:* Es sei  $z = e^{it}$ . Somit ist

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^z \frac{\zeta^{k-1}}{i \cdot P(\zeta)} d\zeta &= \sum_{\nu=1}^d \sum_{\mu=1}^{m_\nu} a_{\nu\mu} \int_{z_0}^z \frac{1}{(\zeta - z_\nu)^\mu} d\zeta \\ &= \sum_{\nu=1}^d \sum_{\mu=2}^{m_\nu} \left[ \frac{\frac{-a_{\nu\mu}}{\mu-1}}{(\zeta - z_\nu)^{\mu-1}} \right]_{\zeta=z_0}^z + \sum_{\nu=1}^d a_{\nu 1} \int_{z_0}^z \frac{1}{\zeta - z_\nu} d\zeta. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$(\vec{Y}(t))^T \cdot \vec{Z}(t) = (\vec{Y}(t))^T \vec{Y}(t) \cdot \left( \int_{z_0}^{e^{it}} \frac{\zeta^{k-1}}{i \cdot P(\zeta)} d\zeta \right) = z^{-k} \cdot P(z) \cdot \left( \int_{z_0}^z \frac{\zeta^{k-1}}{i \cdot P(\zeta)} d\zeta \right)$$

ein trigonometrisches Polynom, etwa  $(\vec{Y}(t))^T \cdot \vec{Z}(t) = z^{-\tilde{m}} Q(z)$ , denn die Einträge von  $\vec{Y}(t)$  und  $\vec{Z}(t)$  sind trigonometrische Polynome. Somit definiert

$$T(z) := z^{k-\tilde{m}} \frac{Q(z)}{P(z)} - \sum_{\nu=1}^d \sum_{\mu=1}^{m_\nu-1} \left[ \frac{\frac{-a_{\nu\mu}}{\mu}}{(\zeta - z_\nu)^\mu} \right]_{\zeta=z_0}^z = \sum_{\nu=1}^d a_{\nu 1} \int_{z_0}^z \frac{1}{\zeta - z_\nu} d\zeta$$

für  $z \in \mathbb{C}$  eine rationale Funktion. Sei  $T(z) = \sum_{j=-j_0}^{\infty} \varrho_j (z-w)^j$  die Laurentreihenentwicklung von  $T$  nahe  $w \in \mathbb{C}$ . Dann ist nahe  $w$

$$T'(z) = \sum_{\substack{j=-j_0 \\ j \neq 0}}^{\infty} j \varrho_j (z-w)^{j-1} = \sum_{\nu=1}^d \frac{a_{\nu 1}}{z - z_\nu}$$

Wählen wir  $w = z_\kappa$  für  $\kappa \in \underline{d}$ , so folgt  $a_{\kappa 1} = 0$ .

□

Also ist  $m_\nu \geq 2$  für alle  $\nu \in \underline{d}$ . Ferner hat  $\frac{z^{k-1}}{i \cdot P(z)}$  in  $z_\nu$  einen Pol der Ordnung  $m_\nu$ . Folglich hat  $\left( \sum_{\nu=1}^d \sum_{\mu=2}^{m_\nu} \frac{-a_{\nu\mu}}{\mu-1} \left[ \frac{1}{(z-z_\nu)^{\mu-1}} \right]_{z=e^{it_0}}^z \right)^2$  einen Pol der Ordnung  $2m_\nu - 2 \geq m_\nu$  in  $z_\nu$ . Nun ist  $\|\vec{Z}(t)\|^2$  ein trigonometrisches Polynom und hat daher keinen Pol in  $z_\nu \neq 0$ . Jedoch hat  $\|\vec{Z}(t)\|^2 = z^{-k} \cdot P(z) \cdot \left( \sum_{\nu=1}^d \sum_{\mu=2}^{m_\nu} \frac{-a_{\nu\mu}}{\mu-1} \left[ \frac{1}{(z-z_\nu)^{\mu-1}} \right]_{z=e^{it_0}}^z \right)^2$  genau dann keinen Pol in  $z_\nu$ , wenn  $2m_\nu - 2 = m_\nu$  also  $m_\nu = 2$  gilt. Es folgt:

**Proposition 4.5:**

Es sei  $\vec{Y} \in J_0^\perp(\gamma)$  und  $z = e^{it}$ . So ist  $\|\vec{Y}(t)\|^2 = z^{-k} P(z) = z^{-k} C \prod_{\nu=1}^k (z - z_\nu)^2$  ein trigonometrisches Polynom mit paarweise und von 0 verschiedenen Nullstellen  $z_1, \dots, z_k$ . Mit  $z_\nu$  ist auch  $\frac{1}{z_\nu}$  eine der Nullstellen. Ferner gilt

$$\frac{z^{k-1}}{iP(z)} = \sum_{\nu=1}^k \frac{a_\nu}{(z - z_\nu)^2}.$$

**Lemma 4.6:** Für alle  $\mu \in k - 2\mathbb{N}$  gilt  $\sum_{\nu=1}^k \frac{a_\nu}{z_\nu^{\mu+2}} = 0$ .

*Beweis:* Nahe  $z = 0$  ist  $z \mapsto \frac{1}{iP(z)}$  holomorph.  $z \mapsto \frac{z^{k-1}}{iP(z)}$  hat eine Nullstelle der Vielfachheit  $k - 1$  in  $z = 0$ . Also gilt für alle  $\mu \in k - 2\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^\mu}{dz^\mu} \Big|_{z=0} \left( \sum_{\nu=1}^k \frac{a_\nu}{(z - z_\nu)^2} \right) = \sum_{\nu=1}^k a_\nu \cdot \frac{d^\mu}{dz^\mu} \Big|_{z=0} \frac{1}{(z - z_\nu)^2} \\ &= \sum_{\nu=1}^k a_\nu \cdot \frac{(-1)^\mu (\mu + 1)!}{(z - z_\nu)^{\mu+2}} \Big|_{z=0} = (-1)^\mu (\mu + 1)! \cdot \sum_{\nu=1}^k \frac{a_\nu}{(z_\nu)^{\mu+2}}. \end{aligned}$$

□

**Lemma 4.7:**  $M$  hat konstante Gaußkrümmung.

*Beweis:* Anders formuliert lautet Lemma 4.6:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{z_1^2} & \cdots & \frac{1}{z_k^2} \\ \frac{1}{z_1^3} & \cdots & \frac{1}{z_k^3} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{z_1^k} & \cdots & \frac{1}{z_k^k} \end{pmatrix}}_{((k-1) \times k)\text{-Matrix}} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Des Weiteren folgt einerseits mit  $P(z) = \sum_{\nu=0}^{2k} b_{\nu-k} z^\nu$

$$\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^{k-1}}{iP\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{z^{1-k}}{i \sum_{\nu=0}^{2k} b_{\nu-k} \left(\frac{1}{z}\right)^\nu} = \frac{z^{1-k}}{i \left(\frac{1}{z}\right)^{2k} \sum_{\nu=0}^{2k} b_{\nu-k} \left(\frac{1}{z}\right)^{\nu-2k}} = \frac{z^{k+1}}{i \sum_{\nu=0}^{2k} b_{\nu-k} z^{2k-\nu}}$$

und andererseits

$$\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^{k-1}}{iP\left(\frac{1}{z}\right)} = \sum_{\nu=1}^k \frac{a_\nu}{\left(\frac{1}{z} - z_\nu\right)^2} = z^2 \sum_{\nu=1}^k \frac{a_\nu}{(1 - z z_\nu)^2} = z^2 \sum_{\nu=1}^k \frac{\frac{a_\nu}{z_\nu^2}}{\left(z - \frac{1}{z_\nu}\right)^2}.$$

Da  $\sum_{\nu=1}^k \frac{\frac{a_\nu}{z_\nu^2}}{\left(z - \frac{1}{z_\nu}\right)^2}$  eine  $(k - 1)$ -fache Nullstelle in 0 hat, erhalten wir analog zu (4.2)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^2 & \cdots & z_k^2 \\ z_1^3 & \cdots & z_k^3 \\ \vdots & & \vdots \\ z_1^k & \cdots & z_k^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a_1}{z_1^2} \\ \frac{a_2}{z_2^2} \\ \vdots \\ \frac{a_k}{z_k^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & \cdots & z_k \\ \vdots & & \vdots \\ z_1^{k-2} & \cdots & z_k^{k-2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} =: B \cdot \alpha.$$



Mit (4.2) zeigen wir  $\beta := (\frac{a_1}{z_1^k}, \dots, \frac{a_k}{z_k^k}) \in \text{Kern}(B)$ :

$$\begin{aligned} B \cdot \begin{pmatrix} \frac{a_1}{z_1^k} \\ \frac{a_2}{z_2^k} \\ \vdots \\ \frac{a_k}{z_k^k} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & \cdots & z_k \\ \vdots & & \vdots \\ z_1^{k-2} & \cdots & z_k^{k-2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{z_1^k} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{z_k^k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{z_1^k} & \cdots & \frac{1}{z_k^k} \\ \frac{1}{z_1^{k-1}} & \cdots & \frac{1}{z_k^{k-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{z_1^2} & \cdots & \frac{1}{z_k^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dann ist entweder  $\text{Rang}(B) \leq k-2$  oder  $\alpha$  und  $\beta$  sind linear abhängig. Die Van-der-Monde-Determinante der folgenden  $(k-1) \times (k-1)$ -Untermatrix von  $B$  ist

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & \cdots & z_{k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ z_1^{k-2} & \cdots & z_{k-1}^{k-2} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq \mu < \nu \leq k-1} (z_\mu - z_\nu) \neq 0.$$

Folglich ist  $\text{Rang}(B) = k-1$  maximal und  $\dim(\text{Kern}(B)) = 1$ . Wir erhalten, dass  $\alpha = c \cdot \beta$  ist mit  $c \in \mathbb{C}$ . Es ist nun  $c = z_\nu^k = \left(\frac{1}{z_\nu}\right)^k$  für alle  $\nu \in \underline{k}$ . Damit gilt

$$1 = (z_\nu \overline{z_\nu})^k = |z_\nu|^{2k}.$$

In unserer Wahl der Jacobifelder haben wir  $\vec{Y} \in J_0^\perp(\gamma)$ , sprich  $P(1) = 0$ , gefordert. Damit ist  $\{z_\nu; \nu \in \underline{k}\}$  die Menge der  $k$ -ten Einheitswurzeln und  $P(z) = C \cdot \prod_{\nu=1}^k (z - z_\nu)^2 = C (z^k - 1)^2$ . Schließlich ist

$$\|\vec{Y}(t)\|^2 = e^{-ikt} \cdot P(e^{it}) = e^{-ikt} \cdot C (e^{ikt} - 1)^2 = -4\tilde{C} \left( \sin\left(\frac{k}{2}t\right) \right)^2$$

und die Gaußkrümmung für  $t \in (0, \frac{2}{k}\pi)$  ist nach Proposition 2.4

$$K(\gamma(t)) = -\frac{\|\vec{Y}\|''(t)}{\|\dot{\gamma}\|^2 \|\vec{Y}\|(t)} = -\frac{-\sqrt{-4\tilde{C}} \left(\frac{k}{2}\right)^2 \sin \frac{k}{2}t}{\|\dot{\gamma}(t)\|^2 \sqrt{-4\tilde{C}} \sin \frac{k}{2}t} = \frac{k^2}{4\|\dot{\gamma}\|^2}.$$

Also hat  $M$  konstante, positive Gaußkrümmung und ist daher isometrisch zu einer Sphäre oder einem reell-projektiven Raum. □

- (i) Ist  $M$  isometrisch zu einer Sphäre, so hat  $\gamma(0)$  den ersten konjugierten Punkt in  $\pi$ . Damit ist  $k = 2$  und  $M$  hat die Krümmung  $K \equiv \frac{1}{\|\dot{\gamma}\|^2}$ .
- (ii) Ist  $M$  isometrisch zu einem reell projektiven Raum, so hat  $\gamma(0)$  den ersten konjugierten Punkt in  $2\pi$ . Damit ist  $k = 1$  und  $M$  hat die Krümmung  $K \equiv \frac{1}{4\|\dot{\gamma}\|^2}$ .

Wir sind noch nicht ganz bei Nikolayevskys Aussage angelangt, da wir zu Beginn gefordert haben, dass alle Geodätischen in  $M$  kongruente Schraubenlinien sind. Um diese Voraussetzung zu beseitigen, folgen wir Nikolayevskys Beweis, siehe [Nik00] Seite 5 f. Es sei  $M \subset \mathbb{R}^N$  eine Fläche, deren Geodätische alle Schraubenlinien sind.

Zunächst sei  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M, t \mapsto p + \sum_{\nu=1}^k x_\nu \cos(\vartheta_\nu t) e_\nu + x_\nu \sin(\vartheta_\nu t) f_\nu$  mit orthonormalen Vektoren  $\{e_\nu, f_\nu; \nu \in \underline{k}\}$  eine nicht geschlossene Geodätische. Es sei  $\mathbb{L}$  der rationale Aufspann von  $\{\vartheta_\nu; \nu \in \underline{k}\}$  und  $d := \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{L}) \geq 2$ . Dann ist der Abschluss  $\overline{\{\gamma(t); t \in \mathbb{R}\}}$  ein flacher rationaler Torus der Dimension  $d$ . Da  $M$  kompakt ist, ist  $d = 2$ .

Nun seien alle Geodätischen in  $M$  geschlossen. So ist  $M$  eine SC-Mannigfaltigkeit nach [Bes78] und damit haben alle Geodätische dieselbe Periode, ohne Einschränkung  $2\pi$ . Ist  $\gamma$  von obiger Form, so sind alle  $\vartheta_\nu \in \mathbb{N}$  und

$$\gamma(t) = p + \sum_{j=1}^{\tilde{k}} \cos(jt) e_j + \sin(jt) f_j$$

mit orthogonalen Vektoren  $\{e_j, f_j\}_{j \in \underline{\tilde{k}}}$  mit  $\|e_j\| = \|f_j\| =: r_j$  und  $r_{\tilde{k}} \neq 0$  (man beachte, dass einige  $r_j = 0$  sein können). Nikolayevsky nennt  $\deg(\dot{\gamma}(0)) := \tilde{k}$  den Grad von  $\gamma$  bzw. von  $\dot{\gamma}(0) \in \text{UM}$ . Es sei  $D \subset \text{UM}$  die Menge, auf welcher  $\deg : \text{UM} \rightarrow \mathbb{N}$  stetig ist. Er zeigt schließlich,  $D$  ist dicht und offen in  $\text{UM}$ . Daraus schließt er, dass ein Jacobifeld  $\vec{Y}$  längs  $\gamma$  mit  $\dot{\gamma}(0) \in D$  von der von uns genutzten Form  $\vec{Y}(t) = e^{-mit} R(e^{it})$  mit einem polynomialen Vektor  $R \in \mathbb{C}^N[z]$  ist. Hier können wir also unseren Beweis anschließen und somit ist Satz 4.1 bewiesen. Nikolayevsky wählt beliebige Jacobifelder  $\vec{J}_\nu \in J^\perp(\gamma)$  mit  $\vec{J}_\nu(t) := e^{-mit} Q_\nu(e^{it})$ . Sein Beweis ist kürzer als unserer, aber in den Rechnungen eng an die Dimension 2 gebunden. Denn hier lassen sich  $Q_1$  und  $Q_2$  als polynomiale Vielfache desselben polynomialen, nicht isotropen Vektors  $Q_\nu(z) = R_\nu(z) \cdot V(z)$  darstellen. Die Wronskibedingung 2.3 reduziert sich zu  $(R'_1 R_2 - R_1 R'_2)(z) (V(z))^T V(z) \equiv \text{konst} \cdot z^{2m-1}$ , einer Bedingung an die komplexen Polynome  $R_i$ . In höheren Dimensionen sind die  $R_\nu$  und  $V$  durch Matrizen zu ersetzen und Kommutativität sowie Nullteilerfreiheit gehen verloren. Im folgenden Kapitel wollen wir unseren Ansatz in höhere Dimensionen erweitern.

## 5 Jacobitensoren in Dimension größer 2

### 5.1 Jacobitensoren auf Schraubenmannigfaltigkeiten

Ab jetzt sei  $M \subset \mathbb{R}^N$  eine kompakte Schraubenmannigfaltigkeit der Dimension  $n + 1$  und  $\gamma$  eine (einfach geschlossene) Geodätische in  $M$  mit kleinster Periode  $2\pi$ . Es sei nun  $\vec{J}_1, \dots, \vec{J}_{2n} \in J^\perp(\gamma)$  eine Basis des Raumes der orthogonalen Jacobifelder. Nach Proposition 3.10 ist  $\vec{J}_\nu(t) = A_\nu \gamma(t) + b_\nu$  für  $\nu \in \underline{2n}$  mit  $A_\nu \in \mathfrak{so}(N), b_j \in \mathbb{R}^N$  ein trigonometrisch polynomialer Vektor. Also gibt es polynomiale Vektoren  $P_\nu : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^N$  vom Grad  $2m_\nu$ , so dass für alle  $t \in \mathbb{R}$

$$\vec{J}_\nu(t) = \frac{1}{z^{m_\nu}} \cdot P_\nu(z) \Big|_{z=e^{it}}$$

gilt. Es sei  $m := \max_{j \in \underline{2n}} m_\nu$ . Da sich jedes orthogonale Jacobifeld  $\vec{J} \in J^\perp(\gamma)$  als Linearkombination der  $\vec{J}_\nu$  schreiben lässt, finden wir einen geeigneten polynomialen Vektor  $P \in \mathbb{C}^N[z]$  mit  $\vec{J}(t) = \frac{1}{z^m} \cdot P(z) \Big|_{z=e^{it}}$  und  $\text{Grad}(P) \leq 2m$ . Jeder Jacobitensor  $\mathcal{Y} = (\vec{Y}_1, \dots, \vec{Y}_n)$  längs  $\gamma$  lässt sich also schreiben als

$$\mathcal{Y}(t) = \frac{1}{z^m} \cdot R(z) \Big|_{z=e^{it}}, \quad (5.1)$$

wobei  $R \in \mathbb{C}^{N \times n}[z]$  eine polynomiale Matrix mit  $\text{Grad}(R) \leq 2m$  ist.

Ab sofort sei  $\mathcal{Y}$  stets ein Lagrangetensor längs  $\gamma$  derart, dass auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  die Matrix  $G(t) := (\mathcal{Y}(t))^T \mathcal{Y}(t)$  invertierbar ist. Mit  $I$  sei immer ein so zu dem momentan gewählten  $\mathcal{Y}$  passendes Intervall gemeint und es sei stets  $t_0 \in I$  mit  $z_0 := e^{it_0}$ . Wir definieren

$$\mathfrak{g}(z) := (R(z))^T R(z) \in \mathbb{C}^{n \times n}. \quad (5.2a)$$

Dann gibt es  $C \in \mathbb{C}$ ,  $d, d_0, d_1, \dots, d_d \in \mathbb{N}$  und paarweise verschiedene  $0, z_1, \dots, z_d \in \mathbb{C}$  mit

$$\det \mathfrak{g}(z) = C z^{d_0} \prod_{\nu=1}^d (z - z_\nu)^{d_\nu}. \quad (5.2b)$$

Somit ist  $G(t) = \frac{1}{z^{2m}} \mathbf{g}(z) \Big|_{z=e^{it}}$ . Wegen  $\mathcal{Y}(t) \in \mathbb{R}^{N \times n}$  folgt mit  $e^{it} = z = \frac{1}{\bar{z}} \in \mathbb{S}^1$

$$\begin{aligned} z^{-2mn} \cdot \det \mathbf{g}(z) &= \overline{z^{-2mn} \cdot \det \mathbf{g}(z)} = \overline{C} \cdot z^{2mn} \cdot \frac{1}{z^{d_0}} \cdot \prod_{\nu=1}^d \left( \frac{1}{z} - \bar{z}_\nu \right)^{d_\nu} \\ &= \overline{C} \cdot z^{2mn-d_0} \cdot \prod_{\nu=1}^l \left[ \frac{1}{z^{d_\nu}} (1 - \bar{z}_\nu z)^{d_\nu} \right] \\ &= z^{-2mn} \cdot z^{(4mn-2d_0-\sum_{\nu=1}^d d_\nu)} \cdot \overline{C} \prod_{\nu=1}^d (-\bar{z}_\nu)^{d_\nu} \cdot z^{d_0} \prod_{\nu=1}^d \left( z - \frac{1}{\bar{z}_\nu} \right)^{d_\nu}. \end{aligned}$$

Also gilt nach dem Identitätssatz

$$z^{d_0} C \prod_{\nu=1}^d (z - z_\nu)^{d_\nu} = z^{(4mn-2d_0-\sum_{\nu=1}^d d_\nu)} \cdot z^{d_0} \cdot \overline{C} \prod_{\nu=1}^d (-\bar{z}_\nu)^{d_\nu} \cdot \prod_{\nu=1}^d \left( z - \frac{1}{\bar{z}_\nu} \right)^{d_\nu}$$

für alle  $z \in \mathbb{C}$  und wir erhalten:

**Lemma 5.1:** *Mit den obigen Bezeichnungen gilt*

(i) *Für jede Nullstelle  $z_\nu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  des Polynoms  $\det \mathbf{g}(z) \in \mathbb{C}[z]$  ist auch  $\frac{1}{\bar{z}_\nu}$  eine Nullstelle. Beide haben dieselbe Vielfachheit  $d_\nu$ .*

(ii) *Es ist  $4mn = 2d_0 + \sum_{\nu=1}^d d_\nu$ .*

Nach Satz 2.12 können wir jeden weiteren Jacobitensor  $\mathcal{Z}$  längs  $\gamma$  als

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(t) &= \mathcal{Y}(t) \left( \int_{t_0}^t (G(s))^{-1} ds \cdot C_2 + C_1 \right) \\ &= \frac{1}{z^m} \cdot R(z) \left( \int_{e^{it_0}}^z \left( \frac{1}{\zeta^{2m}} \mathbf{g}(\zeta) \right)^{-1} \frac{1}{i\zeta} d\zeta \cdot C_2 + C_1 \right) \Big|_{z=e^{it}} \end{aligned}$$

für alle  $t \in I$  mit geeigneten  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Auch hier ist das Wegintegral auf einer Umgebung von  $\{e^{it}; t \in I\}$ , auf der der Integrand holomorph ist, zu verstehen. Uns interessiert die Partialbruchzerlegung von  $\frac{1}{iz} \left( \frac{1}{z^{2m}} \mathbf{g}(z) \right)^{-1} = -iz^{2m-1} \frac{1}{\det \mathbf{g}(z)} (\mathbf{g}(z))^{\text{ad}}$ , wobei  $(\mathbf{g}(z))^{\text{ad}}$  eine polynomiale Matrix ist: Es sei  $p \in \mathbb{K}[x]$  das charakteristische Polynom  $\det(\mathbf{g}(z) - xE_{n \times n})$  von  $\mathbf{g}(z)$  über dem Körper  $\mathbb{K}$  der rationalen Funktionen mit  $p = p_0 + p_1x + \dots$ . Dann sind die Koeffizienten  $p_0 = \det(\mathbf{g}(z)), p_1, \dots \in \mathbb{C}[z]$  Polynome. Es gilt  $0 = p(\mathbf{g}(z))$  und  $(\mathbf{g}(z))^{\text{ad}} := p_0 \cdot (\mathbf{g}(z))^{-1} = \cdot (p_1 E_{n \times n} + p_2 \mathbf{g}(z) + p_3 (\mathbf{g}(z))^2 + \dots)$  ist eine polynomiale Matrix. Diese Partialbruchzerlegung hat die Form

$$-iz^{2m-1} (\mathbf{g}(z))^{-1} = \sum_{\nu=1}^d \sum_{\mu=1}^{d_\nu} \frac{A^{(\nu, \mu)}}{(z - z_\nu)^\mu} + \sum_{\varrho=1}^{d_0} \frac{B^{(\varrho)}}{z^\varrho} + \sum_{\sigma=0}^s C^{(\sigma)} z^\sigma \quad (5.3)$$

mit  $A^{(\nu, \mu)}, B^{(\varrho)}, C^{(\sigma)} \in \mathbb{C}_{\text{sym}}^{n \times n}$  und  $s \in \mathbb{N}$ . Unser Ziel ist die folgende, zu Proposition 4.5 analoge Aussage.

**Satz 5.2:** *Mit den gewählten Bezeichnungen finden wir einen Lagrangetensor  $\mathcal{Y}$ , der Folgendes erfüllt:*

*Es ist  $\det \mathbf{g}(z) = Cz^{d_0} \prod_{\nu=1}^d (z - z_\nu)^2 \in \mathbb{C}[z]$  mit paarweise verschiedenen Nullstellen  $z_0 = 0, z_1, \dots, z_d \in \mathbb{C}$ . Ferner ist*

$$\left( \frac{1}{z^{2m}} \mathbf{g}(z) \right)^{-1} = iz \sum_{\nu=1}^d \frac{A_\nu}{(z - z_\nu)^2}$$

*mit geeigneten Rang-1-Matrizen  $A_1, \dots, A_d \in \mathbb{C}_{sym}^{n \times n}$  die Partialbruchzerlegung von  $(G(t))^{-1}$ . Des Weiteren gibt es für alle  $\nu \in \underline{d}$  ein  $\mu \in \underline{d}$  mit  $z_\mu = \frac{1}{z_\nu}$ . Diese erfüllen*

$$\overline{\left( \frac{iA_\mu}{z_\mu} \right)} = \frac{iA_\nu}{z_\nu}.$$

Wir unterteilen den Beweis von Satz 5.2 in mehrere Teile:

- (i) Zunächst beweisen wir, dass  $A^{(\nu,1)} = B^{(1)} = 0$  für alle  $\nu \in \underline{d}$  gilt (Lemma 5.3)
- (ii) und es für alle  $\nu \in \underline{d}$  ein  $\mu \in \underline{d}_\nu$  gibt mit  $A^{(\nu,\mu)} \neq 0$  (Lemma 5.4).
- (iii) Es ist  $s = d_0 - 2$  und  $C^{(\varrho-2)} = -\overline{B^{(\varrho)}}$  für alle  $\varrho \in \underline{d_0} \setminus \{1\}$  (Lemma 5.6).
- (iv) Dann finden wir eine Menge von Lagrangetensoren  $\mathcal{Y}$ , für die alle  $B^{(\varrho)} = 0$  sind.
- (v) In dieser Menge werden wir den gesuchten Lagrangetensor finden.

Der Übersicht halber wollen wir in den folgenden Lemmata aufeinander aufbauende Bezeichnungen wählen und, sofern nicht anders bemerkt,  $z \in \mathbb{C}$  und  $t_0, t \in I$  und  $z_0 := e^{it_0}$  voraussetzen.

**Lemma 5.3:** *Für  $\nu \in \underline{d}$  gilt  $A^{(\nu,1)} = 0$  und es ist  $B^{(1)} = 0$ .*

**Beweis:** Wir betrachten zunächst den Lagrangetensor  $\mathcal{Z}$ , den wir aus Satz 2.12 durch die Matrizen  $C_1 = 0, C_2 = E_{n \times n}$  erhalten. Es sei  $\hat{R} \in \mathbb{C}^{N \times n}[z]$  eine polynomiale Matrix, so dass  $\mathcal{Z}(t) = \frac{1}{z^m} \hat{R}(z)|_{z=e^{it}}$  gilt. Folglich ist mit  $z = e^{it}$  und mit einem geeigneten  $D \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^m} \hat{R}(z) &= \frac{1}{z^m} R(z) \cdot \int_{z_0}^z \left( \frac{1}{\zeta^{2m}} \mathbf{g}(\zeta) \right)^{-1} \frac{1}{i\zeta} d\zeta \\ &= \frac{1}{z^m} R(z) \cdot \left( \sum_{\nu=1}^d \sum_{\mu=2}^{d_\nu} \frac{\frac{-1}{\mu-1} A^{(\nu,\mu)}}{(z - z_\nu)^{\mu-1}} + \sum_{\varrho=2}^{d_0} \frac{\frac{-1}{\varrho-1} B^{(\varrho)}}{z^{\varrho-1}} + \right. \\ &\quad \left. \sum_{\sigma=0}^s \frac{1}{\sigma+1} C^{(\sigma)} z^{\sigma+1} + D + \int_{z_0}^z \left( \sum_{\nu=1}^d \frac{A^{(\nu,1)}}{(\zeta - z_\nu)} + \frac{B^{(1)}}{\zeta} \right) d\zeta \right). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit  $z^m(R(z))^T$ , so erhalten wir

$$\mathbb{C}^{n \times n} \ni (R(z))^T \hat{R}(z) = \mathfrak{g}(z) \cdot (\dots)$$

Wir wählen eine kleine, einfach zusammenhängende Umgebung  $U \subset \mathbb{C}$  von  $\{e^s; s \in I\}$ , so dass  $0, z_\nu \notin U$  für alle  $\nu \in \underline{d}$ . Schließlich definieren wir eine holomorphe Funktion  $T : U \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$  durch

$$T(z) := \int_{z_0}^z \sum_{\nu=1}^d \frac{A^{(\nu,1)}}{(\zeta - z_\nu)} + \frac{B^{(1)}}{\zeta} d\zeta$$

sowie eine rationale, auf  $U$  holomorphe Funktion  $S : \mathbb{C} \setminus (\{z_\nu; \nu \in \underline{d}\} \cup \{0\}) \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$  durch

$$\begin{aligned} S(z) := & (\mathfrak{g}(z))^{-1} (R(z))^T \hat{R}(z) - \left( \sum_{\nu=1}^d \sum_{\mu=2}^{d_\nu} \frac{\frac{-1}{\mu-1} A^{(\nu,\mu)}}{(z - z_\nu)^{\mu-1}} \right. \\ & \left. + \sum_{\varrho=2}^{d_0} \frac{\frac{-1}{\varrho-1} B^{(\varrho)}}{z^{\varrho-1}} + \sum_{\sigma=0}^s \frac{1}{\sigma+1} C^{(\sigma)} z^{\sigma+1} + D \right) \end{aligned}$$

und sehen  $T(z) = S(z)$  für alle  $z \in U$  nach dem Identitätssatz. Auch die Ableitungen sind gleich. Es ist  $T'(z) = \sum_{\nu=1}^d \frac{A^{(\nu,1)}}{(z-z_\nu)} + \frac{B^{(1)}}{z}$  holomorph auf  $\mathbb{C} \setminus \{z_\nu; \nu \in \underline{d}_0\}$  fortsetzbar. Der Identitätssatz sagt nun  $T'(z) = S'(z)$  außerhalb der Pole  $\{z_\nu; \nu \in \underline{d}_0\}$ . Für  $\kappa \in \underline{d}$  sind die Laurentreihenentwicklungen um  $z_\kappa$  gleich  $T'(z) = \frac{A^{(\kappa,1)}}{(z-z_\kappa)} + \sum_{j=0}^\infty \tau_j (z - z_\kappa)^j$  beziehungsweise  $S(z) = \sum_{j=-d_\kappa}^\infty s_j (z - z_\kappa)^j$  und  $S'(z) = \sum_{j=-d_\kappa}^\infty j s_j (z - z_\kappa)^{j-1}$ . Ein Koeffizientenvergleich zeigt uns  $A^{(\kappa,1)} = 0$ .

Auf analoge Weise sehen wir  $B^{(1)} = 0$ .

□

**Lemma 5.4:** Für alle  $\nu \in \underline{n}$  gibt es ein  $\mu \in \underline{d}_\nu$ , so dass  $A^{(\nu,\mu)} \neq 0$  ist.

*Beweis:* Es gilt  $\mathfrak{g}(z)(\mathfrak{g}(z))^{\text{ad}} = \det(\mathfrak{g}(z))E_{n \times n}$  und  $\det((\mathfrak{g}(z))^{\text{ad}}) = (\det(\mathfrak{g}(z)))^{n-1} = C^{m-1} z^{(n-1)d_0} \prod_{\nu=1}^d (z - z_\nu)^{(n-1)d_\nu}$ . Sei  $\kappa \in \underline{d}$ . Wäre  $A^{(\kappa,\mu)} = 0$  für alle  $\mu \in \underline{d}_\kappa$ , so wäre  $z_\kappa$  eine hebbare Singularität von

$$\frac{-iz^{2m-1}}{\det(\mathfrak{g}(z))} (\mathfrak{g}(z))^{\text{ad}} = -iz^{2m-1} (\mathfrak{g}(z))^{-1} = \sum_{\nu=1}^d \sum_{\mu=2}^{d_\nu} \frac{A^{(\nu,\mu)}}{(z - z_\nu)^\mu} + \sum_{\varrho=2}^{d_0} \frac{B^{(\varrho)}}{z^\varrho} + \sum_{\sigma=0}^s C^{(\sigma)} z^\sigma$$

vergleiche (5.3). Also teilte  $(z - z_\kappa)^{d_\kappa}$  jede Komponente von  $(\mathfrak{g}(z))^{\text{ad}}$  und  $(z - z_\kappa)^{nd_\kappa}$  teilte  $\det((\mathfrak{g}(z))^{\text{ad}})$ . Dies wäre ein Widerspruch.

□

**Korollar 5.5:** Es folgt  $d_\nu \geq 2$  für alle  $\nu \in \underline{d}$ .

**Lemma 5.6:** Es gilt  $s = d_0 - 2$  und  $C^{(\sigma)} = -\overline{B^{(\sigma+2)}}$  für alle  $0 \leq \sigma \leq s$ .

*Beweis:* Wegen  $G(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist mit  $z = e^{it} \in \mathbb{S}^1$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{n \times n} \ni (G(t))^{-1} &= \left( \frac{1}{z^{2m}} \mathfrak{g}(z) \right)^{-1} = iz \left( \sum_{\nu=1}^d \sum_{\mu=2}^{d_\nu} \frac{A^{(\nu, \mu)}}{(z - z_\nu)^\mu} + \sum_{\varrho=2}^{d_0} \frac{B^{(\varrho)}}{z^\varrho} + \sum_{\sigma=0}^s C^{(\sigma)} z^\sigma \right) \\ &= \overline{\left( \frac{1}{z^{2m}} \mathfrak{g}(z) \right)^{-1}} = \frac{-i}{z} \cdot \overline{\left( \sum_{\nu=1}^d \sum_{\mu=2}^{d_\nu} \frac{A^{(\nu, \mu)}}{(z - z_\nu)^\mu} + \sum_{\varrho=2}^{d_0} \frac{B^{(\varrho)}}{z^\varrho} + \sum_{\sigma=0}^s C^{(\sigma)} z^\sigma \right)} \\ &= -iz \cdot \left( \sum_{\nu=1}^d \sum_{\mu=2}^{d_\nu} \frac{z^{\mu-2}}{(-z_\nu)^\mu \left(z - \frac{1}{\overline{z_\nu}}\right)^\mu} \overline{A^{(\nu, \mu)}} + \sum_{\varrho=2}^{d_0} \overline{B^{(\varrho)}} z^{\varrho-2} + \sum_{\sigma=0}^s \overline{C^{(\sigma)}} z^{\sigma+2} \right) \\ &= -iz \cdot \left( \sum_{\nu=1}^d \sum_{\mu=2}^{d_\nu} \left( \sum_{j=0}^{\mu-2} \frac{\binom{\mu-2}{j} \cdot \left(\frac{1}{\overline{z_\nu}}\right)^j}{\left(z - \frac{1}{\overline{z_\nu}}\right)^{j+2}} \right) \frac{\overline{A^{(\nu, \mu)}}}{(-z_\nu)^\mu} + \sum_{\varrho=2}^{d_0} \overline{B^{(\varrho)}} z^{\varrho-2} + \sum_{\sigma=0}^s \overline{C^{(\sigma)}} z^{\sigma+2} \right), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass  $\frac{z^k}{(z-w)^{k+2}} = \frac{1}{(z-w)^2} \cdot \left(1 + \frac{w}{z-w}\right)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{w^j}{(z-w)^{j+2}}$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $w \in \mathbb{C}$  gilt. Ein Koeffizientenvergleich der jeweils letzten zwei Terme gibt uns das Ergebnis. □

Nach (5.1) können wir jeden Lagrangetensor  $\mathfrak{Y}$  durch eine polynomiale Matrix  $R(z)$  mit  $\text{Grad } R(z) \leq 2m$  als  $\mathfrak{Y}(t) = z^{-m} R(z) \big|_{z=e^{it}}$  darstellen. Somit ist

$$\text{Grad}(\mathfrak{g}) \leq 2 \text{Grad}(R) \leq 4m$$

und  $\det(\mathfrak{g}(z))$  ist ein Polynom mit  $\text{Grad}(\det(\mathfrak{g})) \leq 4mn$  ist. Wir definieren

$$\Lambda(\gamma) := \left\{ \mathfrak{Y}; \text{ und es gibt ein offenes Intervall } I \subset \mathbb{R}, \text{ so dass } \begin{aligned} &\mathfrak{Y} \text{ ist Lagrangetensor längs } \gamma \\ &G(t) = (\mathfrak{Y}(t))^T \mathfrak{Y}(t) \text{ für alle } t \in I \text{ invertierbar ist.} \end{aligned} \right\}, \quad (5.5a)$$

$$l := \max_{\mathfrak{Y} \in \Lambda(\gamma)} (\text{Grad}(\det(\mathfrak{g}))) \leq 4mn, \quad (5.5b)$$

$$\Lambda_l(\gamma) := \{\mathfrak{Y} \in \Lambda; \text{Grad}(\det(\mathfrak{g})) = l\}. \quad (5.5c)$$

Nun wählen wir ein  $\mathfrak{Y} \in \Lambda_l(\gamma)$  mit Partialbruchzerlegung

$$-iz^{2m-1}(\mathfrak{g}(z))^{-1} = \sum_{\nu=1}^d \sum_{\mu=2}^{d_\nu} \frac{A^{(\nu, \mu)}}{(z - z_\nu)^\mu} + \sum_{\varrho=2}^{d_0} \left( \frac{B^{(\varrho)}}{z^\varrho} - \overline{B^{(\varrho)}} z^{\varrho-2} \right)$$

und  $t_0 \in I$ . Wir schreiben  $H(t) := \int_{t_0}^t (G(s))^{-1} ds$  und definieren die rationale Matrixfunktion  $\mathfrak{h}$  als Stammfunktion der Partialbruchzerlegung mit der Integrationskonstanten

$A_0 \in \mathbb{C}_{\text{sym}}^{n \times n}$  so gewählt, dass  $\mathfrak{h}(e^{it_0}) = 0$  gilt:

$$\mathfrak{h}(z) := \sum_{\nu=1}^d \sum_{\mu=2}^{d_\nu} \frac{\frac{-1}{\mu-1} A^{(\nu, \mu)}}{(z - z_\nu)^{\mu-1}} + \sum_{\varrho=2}^{d_0} \left( \frac{\frac{-1}{\varrho-1} B^{(\varrho)}}{z^{\varrho-1}} - \frac{1}{\varrho-1} \overline{B^{(\varrho)}} z^{\varrho-1} \right) + A_0. \quad (5.6)$$

Wir sehen, dass  $\mathfrak{h}(e^{it}) = H(t)$  für  $i \in I$ . Es seien  $\mathcal{Z} \in \Lambda(\gamma)$  und  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , so dass  $\mathcal{Z}(t) = \mathcal{Y}(t) \cdot (H(t)C_2 + C_1)$  gilt. Insbesondere ist dann  $C_2^T C_1$  symmetrisch. Es folgt  $G_{\mathcal{Z}}(t) = (\mathcal{Z}(t))^T \mathcal{Z}(t) = (H(t)C_2 + C_1)^T \cdot G(t) \cdot (H(t)C_2 + C_1)$  und damit  $\det(G_{\mathcal{Z}}(t)) = \det(G(t)) \cdot (\det(H(t)C_2 + C_1))^2$  sowie

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{\mathcal{Z}}(e^{it}) &= (R_{\mathcal{Z}}(e^{it}))^T R_{\mathcal{Z}}(e^{it}) = e^{2mit} G_{\mathcal{Z}}(t) = (H(t)C_2 + C_1)^T e^{2mit} G(t) (H(t)C_2 + C_1) \\ &= (\mathfrak{h}(e^{it})C_2 + C_1)^T \mathfrak{g}(e^{it}) (\mathfrak{h}(e^{it})C_2 + C_1). \end{aligned}$$

Nach dem Identitätssatz gilt diese Gleichheit sogar für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Des Weiteren folgt

$$\det(\mathfrak{g}_{\mathcal{Z}}(z)) = \det(\mathfrak{g}(z)) \cdot (\det(\mathfrak{h}(z)C_2 + C_1))^2$$

und, da  $\mathcal{Y} \in \Lambda_l(\gamma)$  ist,

$$\text{Grad}(\det(\mathfrak{g})) \geq \text{Grad}(\det(\mathfrak{g}_{\mathcal{Z}})) = \text{Grad}(\det(\mathfrak{g})(\det(\mathfrak{h}C_2 + C_1))^2). \quad (5.7)$$

**Lemma 5.7:** Es seien  $\mathcal{Y} \in \Lambda(\gamma)$  und  $C \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n}$ . Dann gilt für alle  $s \in \mathbb{R}$  nahe 0  $\mathcal{Z}_s(t) := \mathcal{Y}(t) (H(t) \cdot sC + E_{n \times n}) \in \Lambda(\gamma)$ .

Wir schreiben  $G_s(t) := (\mathcal{Z}_s(t))^T \mathcal{Z}_s(t)$ ,  $\mathcal{Z}_s(z) := z^{-m} Q_s(z)$  und  $\mathfrak{g}_s(z) := (Q_s(z))^T Q_s(z)$ .

**Beweis:** Die Funktion  $f : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(s, t) \mapsto \det(G_s(t))$  ist stetig. Es sei  $t_0 \in I$ , also  $\det(G_0(t_0)) > 0$ . Nahe  $(0, t_0)$  gibt es also eine Umgebung  $U$ , so dass  $f|_U > 0$  ist. Wir finden ein Rechteck  $a := (-\varepsilon, \varepsilon) \times I_0 \subset U$ , so dass  $f|_a > 0$ . Für jedes  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  und jedes  $t \in I_0$  ist also  $G_s(t)$  invertierbar und folglich  $\mathcal{Z}_s \in \Lambda(\gamma)$ . □

**Bemerkung 5.8:** Im Allgemeinen wird sich mit einer solchen Variation das Intervall  $I$  ändern. Betrachten wir auf der  $\mathbb{S}^2$  den Großkreis  $\mathbb{S}^2 \cap v^\perp$ . So ist jedes orthogonale Jacobifeld  $\vec{J}$  der Form  $\vec{J}(t) = (a \sin(t) + b \cos(t)) \cdot v$ . Wählen wir  $\vec{Y}(t) = \sin(t) \cdot v$  und  $t_0 = \pi, C = 1$ . Als maximal wählbares Intervall erhalten wir  $I = (0, \pi)$ . Die obige Variation ergibt  $\vec{Z}_s(t) = (\sin(t) + s \cos(t)) \cdot v$ . Die Nullstelle  $t_1 = 0$  wandert in differenzierbarer Abhängigkeit mit  $s$  durch  $t_1(s) = -\arctan(s)$ . Diese Abhängigkeit werden wir in Lemma 5.10 genauer betrachten.



**Lemma 5.9:** *Es gilt  $B^{(\varrho)} = 0$  für alle  $2 \leq \varrho \leq d_0$ .*

*Beweis:* Wir zeigen zunächst, dass für alle  $\varrho \in \Psi := \{2; \dots; d_0\}$  die Hauptdiagonale von  $B^{(\varrho)}$  null ist. Hierzu seien  $j \in \underline{n}$  und  $C = E_{jj}$  und  $\mathcal{Z}_s$  wie oben. Dann ist

$$\det(\mathfrak{h}(z)sC + E_{n \times n}) = s\mathfrak{h}_{jj}(z) + 1.$$

Wäre  $B_{jj}^{(\varrho_0)} \neq 0$  für ein maximales  $\varrho_0 \in \Psi$ , so wäre  $\mathfrak{h}_{jj}(z) = \sum_{\varrho=2}^{\varrho_0} \frac{-1}{\varrho-1} \overline{B_{jj}^{(\varrho)}} z^{\varrho-1} + \frac{p(z)}{q(z)}$  mit Polynomen  $p, q \in \mathbb{C}[z]$  und  $\text{Grad}(p) < \text{Grad}(q)$  nach (5.6). Aber

$$\begin{aligned} l &\stackrel{(5.7)}{\geq} \text{Grad} \left( \det(\mathfrak{g}(z)) \cdot (s\mathfrak{h}_{jj}(z) + 1)^2 \right) \\ &= \text{Grad}(\det(\mathfrak{g}(z))) + 2(\varrho_0 - 1) > \text{Grad}(\det(\mathfrak{g}(z))) = l \end{aligned}$$

ist ein Widerspruch und die Hauptdiagonale von  $B^{(\varrho)}$  ist für alle  $\varrho \in \Psi$  gleich null.

Für alle anderen Einträge verfahren wir analog mit  $i < j \in \underline{n}$  und  $C_2 = E_{ij} + E_{ji}$ . Da  $\mathfrak{h}(z)$  symmetrisch ist, folgt

$$\det(\mathfrak{h}(z)C_2 + C_1) = \det \begin{pmatrix} s\mathfrak{h}_{ii}(z)+1 & s\mathfrak{h}_{ij}(z) \\ s\mathfrak{h}_{ji}(z) & s\mathfrak{h}_{jj}(z)+1 \end{pmatrix} = (s\mathfrak{h}_{ii}(z) + 1)(s\mathfrak{h}_{jj}(z) + 1) - (s\mathfrak{h}_{ij}(z))^2.$$

Wäre  $B_{ij}^{(\varrho_0)} \neq 0$  für ein maximales  $\varrho_0 \in \Psi$ , so wäre  $\mathfrak{h}_{ij}(z) = \sum_{\varrho=2}^{\varrho_0} \frac{-1}{\varrho-1} \overline{B_{ij}^{(\varrho)}} z^{\varrho-1} + \frac{p(z)}{q(z)}$  mit  $p(z), q(z) \in \mathbb{C}[z]$  und  $\text{Grad } p(z) < \text{Grad } q(z)$ . Aber

$$\begin{aligned} l &\stackrel{(5.7)}{\geq} \text{Grad} \left( \det(\mathfrak{g}(z)) \cdot [(s\mathfrak{h}_{ii}(z) + 1)(s\mathfrak{h}_{jj}(z) + 1) - (s\mathfrak{h}_{ij}(z))^2]^2 \right) \\ &= \text{Grad}(\det \mathfrak{g}(z)) + 4(\varrho_0 - 1) > \text{Grad}(\det \mathfrak{g}(z)) = l \end{aligned}$$

ist ein Widerspruch und wir sehen  $0 = B_{ij}^{(\sigma_0)} = B_{ji}^{(\varrho)}$  für alle  $\varrho \in \Psi$  und  $i, j \in \underline{n}$ . □

Nun wählen wir  $\mathcal{Y} \in \Lambda_l(\gamma)$  mit maximalem  $d$ , also dass  $\det(\mathfrak{g}(z))$  maximal viele, paarweise und von 0 verschiedene Nullstellen besitzt.

**Lemma 5.10:** *Es sei  $C \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n}$ . Für  $s \in \mathbb{R}$  nahe 0 ist die Schreibweise*

$$\det(\mathfrak{g}_s(z)) = \alpha(s) \cdot z^{d_0} \cdot \prod_{\nu \in \underline{d}} (z - z_\nu(s))^{d_\nu} \quad (5.8)$$

*mit differenzierbaren Funktionen  $\alpha$  und  $z_\nu$  wohldefiniert.*

**Bemerkung 5.11:** Für kleine  $C \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n}$  ist  $\mathcal{Z}_C(t) := \mathcal{Y}(t)(H(t) \cdot C + E_{n \times n}) \in \Lambda(\gamma)$  nach Lemma 5.7 ein Lagrangetensor. Lemma 5.10 zeigt nun, dass die Nullstellen von  $\det(\mathcal{Z}_C(t)^T \mathcal{Z}_C(t))$  in  $C = 0$  differenzierbar von  $C$  abhängen.

**Beweis:** Wir betrachten das Polynom in  $s$  und  $z$

$$m(s, z) := \alpha(s) z^{d_0(s)} \prod_{\nu \in \underline{d}(s)} (z - z_\nu(s))^{d_\nu(s)} = \det(\mathfrak{g}_s(z)).$$

Wir zeigen zuerst, dass  $d$  und die  $d_\nu$  für kleine  $|s|$  nicht von  $s$  abhängen.

Sei  $\kappa \in \underline{d}$ . Seien  $r, s_0 > 0$  klein, dann ist  $m|_{[-s_0, s_0] \times \overline{B_r(z_\kappa)}}$  gleichmäßig stetig. Also finden wir für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta_\kappa > 0$ , so dass für alle  $(s_1, z_1), (s_2, z_2) \in [-s_0, s_0] \times \overline{B_r(z_\kappa)}$  mit  $\|(s_1 - s_2, z_1 - z_2)\| \in [-\delta_\kappa, \delta_\kappa]$  gilt  $|m(s_1, z_1) - m(s_2, z_2)| < \varepsilon$ . Insbesondere folgt dies für  $s_1 = 0, z_1 = z_2$  sowie  $s_2 \in [-\delta_\kappa, \delta_\kappa]$ .

Wir wählen  $r > 0$  so klein, dass  $\overline{B_r(z_\nu)} \cap \overline{B_r(z_\mu)} = \emptyset$  für alle  $\nu \neq \mu \in \underline{d}_0$  gilt. Dann existiert ein  $0 < \varepsilon \leq \min\{|m(0, z)|; z \in \bigcup_{\nu \in \underline{d}_0} \partial B_{\frac{r}{2}}(z_\nu)\}$ . Wir wählen  $\{\delta_\nu; \nu \in \underline{d}_0\}$  wie oben und setzen  $\delta := \min_{\nu \in \underline{d}_0} \delta_\nu$ . Für alle  $z \in \bigcup_{\nu \in \underline{d}_0} \partial B_{\frac{r}{2}}(z_\nu)$  und  $s \in [-\delta, \delta]$  erhalten wir

$$|m(0, z) - m(s, z)| \stackrel{\text{Wahl von } \delta}{<} \varepsilon \stackrel{\text{Wahl von } \varepsilon}{\leq} |m(0, z)|.$$

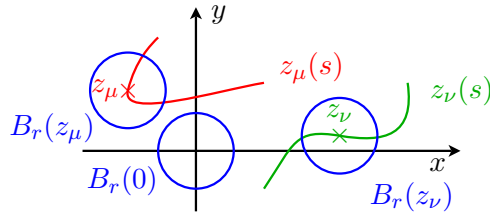
Für alle  $s \in [-\delta, \delta]$  erfüllen also  $m(0, \cdot)$  und  $m(s, \cdot)$  die Voraussetzungen des Satzes von Rouché in der Nähe jedes  $z_\kappa$ :

**Satz 5.12** (Satz von Rouché, vergleiche [FL94], S.164): *Es seien  $f$  und  $g$  holomorph im Bereich  $U$ , weiter sei  $\Gamma$  ein Randzyklus des Teilbereichs  $V \subset U$ . Gilt  $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$  auf  $\text{Spur}(\Gamma)$ , so haben  $f$  und  $g$  gleichviele Nullstellen in  $V$  (mit Vielfachheiten gezählt).*

Das bedeutet, eine kleine Änderung von  $s$  lässt die Anzahl der Nullstellen nach Vielfachheiten gezählt innerhalb  $\partial B_r(z_\kappa)$  fest. Da nach Wahl von  $\mathcal{Y}$  aber  $m(s, z)$  nicht mehr paarweise verschiedene Nullstellen als  $m(0, z)$  besitzen kann, bleiben die Vielfachheiten  $d_\nu \equiv d_\nu(s)$  der Nullstellen  $z_\nu(s)$  erhalten und damit auch ihre Anzahl  $d(s) \equiv d$ . Die Nullstelle  $z_0 = 0$  ändert sich zudem nicht. Folglich ist

$$m(s, z) = \alpha(s) z^{d_0} \prod_{\kappa \in \underline{d}} (z - z_\kappa(s))^{d_\kappa}$$

eine wohldefinierte Darstellung.



Da  $m(s, z)$  ein Polynom in  $s$  und  $z$  ist, ist  $s \mapsto \alpha(s)$  als Koeffizient des höchsten Grades bzgl.  $z$  differenzierbar. Wir müssen also noch die Differenzierbarkeit der Funktion  $s \mapsto z_\kappa(s)$  zeigen.

Wir definieren  $f_s(z) := \frac{\partial^{d_\kappa-1}}{\partial z^{d_\kappa-1}} m(s, z)$ . Dann ist  $f_s(z)$  für festes  $s$  ein Polynom in  $z$  mit einer einfachen Nullstelle in  $z_\kappa(s)$  nahe  $z_\kappa(0) = z_\kappa$ . Dieses entwickeln wir nahe  $z_\kappa$  als  $f_s(z) = \sum_{l=0}^L \varrho_l(s)(z - z_\kappa)^l$ , wobei die Koeffizienten  $\varrho_l$  Polynome in  $s$  sind mit  $\varrho_0(0) = 0$  und  $\varrho_1(0) \neq 0$ . Wir wollen also das Gleichungssystem

$$0 \equiv f_s(x + iy) = \begin{pmatrix} f_s^{\text{Re}}(x + iy) \\ f_s^{\text{Im}}(x + iy) \end{pmatrix}$$

nahe  $z_\kappa = x_\kappa + iy_\kappa$  und  $s = 0$  nach  $s$  auflösen und dazu den *Satz über implizite Funktionen*, vgl. [Kön04], anwenden. Es gilt

$$Df_{(0, x_\kappa, y_\kappa)} = \left( \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} f_s(z_\kappa) \mid D(f_0)_{(x_\kappa, y_\kappa)} \right).$$

Da  $f_0$  als Polynom holomorph ist und die Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllt, folgt

$$\det(D(f_0)_{(x_\kappa, y_\kappa)}) = |f_0'(z_\kappa)|^2 = |\varrho_1(0)|^2 \neq 0.$$

Also gibt es eine nahe 0 implizit gegebene, differenzierbare Funktion  $s \mapsto z_\kappa(s)$  mit  $f_s(z_\kappa(s)) \equiv 0$  für kleine  $s$  und  $\dot{z}_\kappa(0) = \frac{\varrho_0'(0)}{\varrho_1(0)}$ . Damit sind  $\alpha, z_\kappa$  differenzierbar nahe  $s = 0$  von  $s$  abhängig. □

**Lemma 5.13:** Es ist  $-iz^{2m-1}(\mathfrak{g}(z))^{-1} = iz \sum_{\nu=1}^d \frac{A^{(\nu, 2)}}{(z - z_\nu)^2}$ .

*Beweis:* Sei  $\kappa \in \underline{d}$  und  $C \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n}$ . Wir setzen  $\tilde{d}_\kappa := -1 + \max\{\mu \in \underline{d}_\kappa; A^{(\kappa, \mu)} \neq 0\}$  und definieren eine nahe  $z_\kappa$  holomorphe und nicht verschwindende Matrix  $A_\kappa$  durch  $A_\kappa(z) := (z - z_\kappa)^{\tilde{d}_\kappa} \mathfrak{h}(z)$ . Es gilt  $A_\kappa(z_\kappa) = \frac{-1}{\tilde{d}_\kappa} A^{(\kappa, \tilde{d}_\kappa+1)}$ . Wir betrachten mit

$$m(s, z) = m(0, z) \cdot \left( \det \left( \frac{A_\kappa(z)}{(z - z_\kappa)^{\tilde{d}_\kappa}} sC + E_{n \times n} \right) \right)^2 = \alpha(s) z^{d_0} \prod_{\nu \in \underline{d}} (z - z_\nu(s))^{d_\nu}$$

ein Polynom in  $z \in \mathbb{C}$  und  $s \in \mathbb{R}$  nahe 0. Es sei  $t \in I$  und  $s \in \mathbb{R}$  nahe 0. Dann ist  $m(s, e^{it}) \in \mathbb{R}^+$ , da  $G_s(t)$  positiv definit ist. Es folgt

$$2 \cdot \log \left( \det \left( \frac{A_\kappa(z)}{(z - z_\kappa)^{\tilde{d}_\kappa}} sC + E_{n \times n} \right) \right) = \log \frac{m(s, z)}{m(0, z)} = \log m(s, z) - \log m(0, z).$$

Nach  $s$  abgeleitet erhalten wir

$$2 \text{ Spur} \left( \frac{A_\kappa(z)}{(z - z_\kappa)^{\tilde{d}_\kappa}} C \left( \frac{A_\kappa(z)}{(z - z_\kappa)^{\tilde{d}_\kappa}} sC + E_{n \times n} \right)^{-1} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \log m(s, z) = \frac{\alpha'(s)}{\alpha(s)} + \sum_{\nu \in \underline{d}} \frac{-d_\nu z'_\nu(s)}{z - z_\nu(s)}$$

und somit in  $s = 0$

$$\frac{\alpha'(0)}{\alpha(0)} - \sum_{\nu \in \underline{d}} d_\nu \frac{z'_\nu(0)}{z - z_\nu} = \frac{2 \operatorname{Spur}(A_\kappa(z)C)}{(z - z_\kappa)^{\tilde{d}_\kappa}}$$

nach dem Identitätssatz für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_\nu; \nu \in \underline{d}\}$ . Wir sehen gleich, dass wir  $C \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n}$  so wählen können, dass  $\operatorname{Spur}(A_\kappa(z_\kappa)C) \neq 0$  gilt. Ein Koeffizientenvergleich zeigt dann, dass  $\tilde{d}_\kappa = 1$  und

$$\operatorname{Spur}(A_\kappa(z_\kappa)C) = -\frac{d_\kappa}{2} z'_\kappa(0) \quad (5.9)$$

gilt (man beachte, dass  $z'_\kappa(0)$  von  $C$  abhängt).

**ZU ZEIGEN:** Es gibt ein  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $\operatorname{Spur}(A_\kappa(z_\kappa)C) \neq 0$ .

Wir wissen, dass  $A_\kappa(z_\kappa) \neq 0$  gilt. Ist  $A_\kappa(z_\kappa)_{jj} \neq 0$  wählen wir  $C = E_{jj}$  und sind fertig. Angenommen die Diagonale ist 0, so gibt es  $i < j \in \underline{n}$  mit  $A_\kappa(z_\kappa)_{ij} \neq 0$ . Wir setzen  $S := E_{n \times n} + E_{ij}$ . Mit  $(S^T A_\kappa(z_\kappa) S)_{ii} = 2(A_\kappa(z_\kappa))_{ij}$ . Dann hat  $S^T A_\kappa(z_\kappa) S$  einen Eintrag auf der Hauptdiagonalen ungleich null. Mit  $C := S E_{jj} S^T$  ist  $\operatorname{Spur}(A_\kappa(z_\kappa)C) = \operatorname{Spur}(S^T A_\kappa(z_\kappa) S E_{jj}) = 2(A_\kappa(z_\kappa))_{ij} \neq 0$ .

Es gilt also  $\mathfrak{h}(z) = \sum_{\nu \in \underline{d}} \frac{-A^{(\nu,2)}}{z - z_\nu} + A_0$  und damit

$$-iz^{2m-1}(\mathfrak{g}(z))^{-1} = iz \sum_{\nu=1}^d \frac{A^{(\nu,2)}}{(z - z_\nu)^2}. \quad (5.10)$$

□

**Lemma 5.14:** Für alle  $\nu \in \underline{d}$  ist  $\operatorname{Rang} A^{(\nu,2)} = 1$  und  $d_\nu = 2$ .

**Beweis:** Wir behalten alle im vorangegangenen Beweis eingeführten Bezeichnungen. Die zweite Ableitung  $\frac{\partial^2}{\partial s^2} m(0, z)$  ist

$$\left( \frac{\alpha'' \alpha - \alpha'^2}{\alpha^2} \right) (0) - \sum_{\nu \in \underline{d}} d_\nu \frac{z''_\nu(0)}{z - z_\nu} - \sum_{\nu \in \underline{d}} d_\nu \frac{(z'_\nu(0))^2}{(z - z_\nu)^2} = -2 \operatorname{Spur} \left( \left( \frac{A_\kappa(z)C}{z - z_\kappa} \right)^2 \right)$$

und ergibt nach Koeffizientenvergleich

$$\operatorname{Spur} \left( (A_\kappa(z_\kappa)C)^2 \right) = \frac{1}{2} d_\kappa (z'_\kappa(0))^2 = \frac{2}{d_\kappa} (\operatorname{Spur}(A_\kappa(z_\kappa)C))^2.$$

Da wir  $C \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n}$  beliebig gewählt hatten, nehmen wir nun  $C + uD$  mit beliebigen  $D \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n}$  und  $u \in \mathbb{R}$ . Des Weiteren sei  $C \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n}$  wie oben konstruiert, so dass  $\text{Spur}(A_\kappa(z_\kappa)C) \neq 0$  und  $\text{Rang}(C) = 1$  ist. Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \frac{1}{2} \frac{d}{du} \bigg|_{u=0} \left( \text{Spur} \left( [A_\kappa(z_\kappa)(C + uD)]^2 \right) - \frac{2}{d_\kappa} [\text{Spur}(A_\kappa(z_\kappa)(C + uD))]^2 \right) \\ &= \text{Spur}(A_\kappa(z_\kappa)CA_\kappa(z_\kappa)D) - \frac{2}{d_\kappa} \text{Spur}(A_\kappa(z_\kappa)C) \text{Spur}(A_\kappa(z_\kappa)D) \\ &= \text{Spur} \left( \left[ A_\kappa(z_\kappa)CA_\kappa(z_\kappa) - \frac{2 \text{Spur}(A_\kappa(z_\kappa)C)}{d_\kappa} A_\kappa(z_\kappa) \right] D^T \right). \end{aligned}$$

Da  $\langle A, B \rangle_{\mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n}} := \frac{1}{2} \text{Spur}(AB^T)$  das euklidische Skalarprodukt auf dem Raum der reellen symmetrischen Matrizen ist und  $D \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n}$  beliebig ist, schließen wir, dass sowohl Real- als auch Imaginärteil der Matrix [...] und damit sie selbst null ist:

$$A_\kappa(z_\kappa)CA_\kappa(z_\kappa) - \frac{2 \text{Spur}(A_\kappa(z_\kappa)C)}{d_\kappa} A_\kappa(z_\kappa) = 0 \quad \text{für jedes } C \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n}. \quad (5.11)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= A_\kappa(z_\kappa)CA_\kappa(z_\kappa)C - \frac{2}{d_\kappa} \text{Spur}(A_\kappa(z_\kappa)C) A_\kappa(z_\kappa)C \\ &= \left[ x^2 - \frac{2}{d_\kappa} \text{Spur}(A_\kappa(z_\kappa)C) x \right]_{x=A_\kappa(z_\kappa)C}. \end{aligned}$$

Also teilt das Minimalpolynom von  $A_\kappa(z_\kappa)C$  das Polynom  $x(x - \frac{2}{d_\kappa} \text{Spur}(A_\kappa(z_\kappa)C))$ . Folglich ist  $A_\kappa(z_\kappa)C$  ähnlich zur Diagonalmatrix

$$A_\kappa(z_\kappa)C \cong \begin{pmatrix} \frac{2}{d_\kappa} \text{Spur}(A_\kappa(z_\kappa)C) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{2}{d_\kappa} \text{Spur}(A_\kappa(z_\kappa)C) & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$\text{Spur}(A_\kappa(z_\kappa)C) = \text{Rang}(A_\kappa(z_\kappa)C) \cdot \frac{2}{d_\kappa} \text{Spur}(A_\kappa(z_\kappa)C). \quad (5.12)$$

Wegen  $\text{Spur}(A_\kappa(z_\kappa)C) \neq 0$  und  $1 = \text{Rang}(C) \geq \text{Rang}(A_\kappa(z_\kappa)C) = \frac{d_\kappa}{2} \geq 1$  ist die Vielfachheit des Eigenwertes  $\frac{2}{d_\kappa} \text{Spur}(A_\kappa(z_\kappa)C)$ . Diese ist somit gleich 1 und  $d_\kappa = 2$ .

Wir betrachten nun  $C = E_{n \times n}$  und zwei Fälle:

- (i) Ist  $\text{Spur}(A_\kappa(z_\kappa)) \neq 0$ , so ist  $\text{Rang}(A_\kappa(z_\kappa)) = 1$  nach (5.12).
- (ii) Ist  $\text{Spur}(A_\kappa(z_\kappa)) = 0$ , so teilt das Minimalpolynom von  $A_\kappa(z_\kappa)$  das Polynom  $x^2$ . Folglich ist  $A_\kappa(z_\kappa)^2 = 0$ . Es seien  $\zeta := \text{Re}(A_\kappa(z_\kappa)), \eta := \text{Im}(A_\kappa(z_\kappa)) \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n}$ .

Dann ist  $0 = A_\kappa(z_\kappa)^2 = (\zeta + i\eta)^2 = \zeta^2 - \eta^2 + i(\zeta\eta + \eta\zeta)$  und  $\zeta^2 = \eta^2 \neq 0$ . Ferner ist  $\zeta\eta = -\eta\zeta = -(\zeta\eta)^T$  schief-symmetrisch, also  $\langle \zeta, \eta \rangle_{\mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n}} = 0$ . Damit ist  $\text{Spur}(A_\kappa(z_\kappa)\zeta) = \text{Spur}(\zeta\zeta) + i\text{Spur}(\zeta\eta) = \|\zeta\|_{\mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n}}^2 > 0$ . Nach (5.12) ist  $\text{Rang}(A_\kappa(z_\kappa)\zeta) = 1$  und nach (5.11) gilt

$$\text{Spur}(A_\kappa(z_\kappa)\zeta) \cdot A_\kappa(z_\kappa) = A_\kappa(z_\kappa)\zeta \cdot A_\kappa(z_\kappa).$$

Somit ist  $0 < \text{Rang}(A_\kappa(z_\kappa)) \leq \text{Rang}(A_\kappa(z_\kappa)\zeta) = 1$ .

Schließlich haben wir gezeigt, dass  $A_\kappa(z_\kappa) = -A^{(\kappa,2)}$  Rang 1 hat. □

**Lemma 5.15:** *Es gilt:*

- (i) Ist  $\nu \in \underline{d}$  und  $z_\nu \in \mathbb{S}^1$ , so ist  $\frac{iA^{(\nu,2)}}{z_\nu} = \overline{\left(\frac{iA^{(\nu,2)}}{z_\nu}\right)} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n}$ .
- (ii) Ist  $\nu \in \underline{d}$  und  $z_\nu \notin \mathbb{S}^1$ , gibt es nach Lemma 5.1 ein  $\mu \in \underline{d}$  mit  $z_\mu = \frac{1}{\overline{z_\nu}}$  und es gilt  $\frac{iA^{(\mu,2)}}{z_\mu} = \overline{\left(\frac{iA^{(\nu,2)}}{z_\nu}\right)}$ .

*Beweis:* Wie im Beweis zu Lemma 5.6 nutzen wir  $G(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , also

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{n \times n} \ni (G(t))^{-1} &= \left( \frac{1}{w^{2m}} \mathfrak{g}(w) \right)^{-1} = iw \left( \sum_{\nu=1}^d \frac{A^{(\nu,2)}}{(w - z_\nu)^2} \right) \\ &= \overline{\left( \frac{1}{w^{2m}} \mathfrak{g}(z) \right)^{-1}} = \frac{-i}{w} \cdot \overline{\left( \sum_{\nu=1}^d \frac{A^{(\nu,2)}}{(w - z_\nu)^2} \right)} = -iw \cdot \left( \sum_{\nu=1}^d \frac{\overline{\frac{A^{(\nu,2)}}{z_\nu^2}}}{(w - \frac{1}{\overline{z_\nu}})^2} \right). \end{aligned}$$

Ist  $z_\mu = \frac{1}{\overline{z_\nu}}$ , so ergibt ein Koeffizientenvergleich  $\frac{i}{z_\mu} A^{(\mu,2)} = -i \overline{z_\nu} \frac{\overline{A^{(\nu,2)}}}{\overline{z_\nu^2}} = \overline{\left( \frac{iA^{(\nu,2)}}{z_\nu} \right)}$ . □

Wir haben also gezeigt, dass für unser gewähltes  $\mathcal{Y} \in \Lambda_l(\gamma)$  die Partialbruchzerlegung

$$z^{2m}(\mathfrak{g}(z))^{-1} = iz \sum_{\nu \in \underline{d}} \frac{A^{(\nu,2)}}{(z - z_\nu)^2}$$

lautet und  $A^{(\nu,2)}$  eine komplexe, symmetrische Matrix von Rang 1 mit den Eigenschaften aus Lemma 5.15 ist. Damit ist Satz 5.2 bewiesen.

## 5.2 Die Partialbruchzerlegung

In diesem Kapitel wollen wir die eben gewonnene Partialbruchentwicklung weiter untersuchen. Sei  $\kappa \in \underline{d}$ . Wir finden ein  $w_\kappa \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ , so dass  $w_\kappa w_\kappa^T = \frac{-iA^{(\kappa,2)}}{z_\kappa}$  gilt. Es sei  $z_\mu = \frac{1}{z_\kappa}$ , so gilt nach Lemma 5.6  $\overline{w_\kappa} \overline{w_\kappa}^T = \overline{\left(\frac{-iA^{(\kappa,2)}}{z_\kappa}\right)} = \frac{-iA^{(\mu,2)}}{z_\mu} = w_\mu w_\mu^T$ . Daher können wir  $w_\mu = \overline{w_\kappa}$  wählen. Insbesondere folgt für  $z_\kappa = \frac{1}{z_\kappa} \in \mathbb{S}^1$ , dass  $w_\kappa \in \mathbb{R}^n$  oder  $w_\kappa \in i\mathbb{R}^n$  ist.

**Bemerkung 5.16:** Der Fall  $0 = \frac{-i}{z_\kappa} \text{Spur}(A^{(\kappa,2)}) = \text{Spur}(w_\kappa w_\kappa^T) = w_\kappa^T w_\kappa$  ist nicht ausgeschlossen. Da  $w_\kappa$  dann isotrop ist, ist  $w_\kappa w_\kappa^T$  nilpotent von Ordnung 2.

**Lemma 5.17:** (i) Für jedes  $\nu \in \underline{d}$  gibt es ein  $w_\nu \in \mathbb{C}^n$ , so dass

$$(G(t))^{-1} = iz \sum_{\nu \in \underline{d}} \frac{A^{(\nu,2)}}{(z - z_\nu)^2} \Big|_{z=e^{it}} = z \sum_{\nu \in \underline{d}} \frac{-z_\nu w_\nu w_\nu^T}{(z - z_\nu)^2} \Big|_{z=e^{it}}$$

gilt. Ist  $z_\nu \in \mathbb{S}^1$ , so folgt  $w_\nu \in \mathbb{R}^n$ . Ist  $z_\nu \notin \mathbb{S}^1$  und sei  $z_\mu = \frac{1}{z_\nu}$ , so ist  $w_\nu = w_\mu$ .

(ii) Die Nullstellen  $z_1, \dots, z_d$  lassen sich so sortieren, dass  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{S}^1$  sind und  $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}^n$  eine Basis bilden.

(iii) Ist  $z_\kappa = e^{it_\kappa}$ , so ist  $\mathcal{Y}w_\kappa$  ein Jacobifeld mit Nullstelle  $t_\kappa$ . Genauer gibt es einen trigonometrisch polynomialen Vektor  $V$ , so dass  $\mathcal{Y}(t)w_\kappa = \sin(\frac{t-t_\kappa}{2}) \cdot V(\frac{t}{2})$  gilt.

**Beweis:** Ad (i): Sei  $z_\kappa = e^{it_\kappa} \in \mathbb{S}^1$  mit  $w_\kappa \in \varepsilon \mathbb{R}^n$  und  $\varepsilon \in \{1; i\}$ . Wir zeigen, dass  $\varepsilon = 1$  gilt. In Bemerkung 2.11 hatten wir gesehen, dass  $G(t)$  symmetrisch positiv semidefinit ist. Folglich ist auch  $(G(t))^{-1}$  symmetrisch positiv definit, sofern  $G(t)$  invertierbar ist. Wählen wir  $t$  nahe  $t_\kappa$ , so gilt

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{w_\kappa^T}{\varepsilon} (G(t))^{-1} \frac{w_\kappa}{\varepsilon} = \frac{iz}{\varepsilon^2} \sum_{\nu \in \underline{d}} \frac{w_\kappa^T A^{(\nu,2)} w_\kappa}{(z - z_\nu)^2} \Big|_{z=e^{it}} = \varepsilon^2 z \sum_{\nu \in \underline{d}} \frac{-z_\nu w_\kappa^T w_\nu w_\nu^T w_\kappa}{(z - z_\nu)^2} \Big|_{z=e^{it}} \\ &= \varepsilon^2 \frac{-e^{it} e^{it_\kappa}}{(e^{it} - e^{it_\kappa})^2} \|w_\kappa\|^4 + \underbrace{\left[ z \sum_{\nu \in \underline{d} \setminus \{\kappa\}} \frac{-z_\nu (w_\nu^T w_\kappa)^2}{(z - z_\nu)^2} \right]_{z=e^{it}}}_{\text{beschränkt für } t \rightarrow t_\kappa, \text{ etwa } |\dots| \leq c} \leq \underbrace{\frac{\varepsilon^2 \|w_\kappa\|^2}{(2 \sin(\frac{t-t_\kappa}{2}))^2}}_{\xrightarrow{t \rightarrow t_\kappa} +\infty} + c. \\ &= \frac{1}{(2 \sin(\frac{t-t_\kappa}{2}))^2} \end{aligned}$$

Folglich ist  $\varepsilon^2 = 1$ . Die übrigen Aussagen wurden oben zu Beginn des Kapitels gezeigt.

Ad (ii): Angenommen, es gäbe ein  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  mit  $v \perp \{w_\nu; \nu \in \underline{d} \wedge z_\nu \in \mathbb{S}^1\}$ . Dann wäre  $v^T (G(t))^{-1} v \in \mathbb{R}_0^+$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  definiert und für fast alle ungleich 0 - nämlich für alle  $t \in \mathbb{R}$  mit  $\det(G(t)) \neq 0$ . Integrieren wir dies über eine Periode, so erhalten wir

mit (5.13) durch

$$\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} \ni \int_0^{2\pi} e^{it} \sum_{\substack{\nu \in \underline{d} \\ z_\nu \notin \mathbb{S}^1}} \frac{-z_\nu (w_\nu^T v)^2}{(e^{it} - z_\nu)^2} dt = \sum_{\substack{\nu \in \underline{d} \\ z_\nu \notin \mathbb{S}^1}} i z_\nu (w_\nu^T v)^2 \int_{\mathbb{S}^1} \frac{1}{(\zeta - z_\nu)^2} d\zeta = 0$$

einen Widerspruch. Also ist  $\text{Span}\{w_\nu; \nu \in \underline{d} \wedge z_\nu \in \mathbb{S}^1\} = \mathbb{R}^n$ , insbesondere gibt es  $n$  verschiedene Nullstellen (nach Umsortieren)  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{S}^1$  mit linear unabhängigen  $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}^n$ .

Ad (iii): Jedes  $v \in \mathbb{R}^n$  definiert ein Jacobifeld  $\vec{Z} \in J^\perp(\gamma)$  durch

$$\vec{Z}(t) := \mathcal{Y}(t) \int_{t_0}^t (G(s))^{-1} ds v = \sum_{\nu \in \underline{d}} \frac{z_\nu (z - z_0) w_\nu^T v}{(z - z_\nu)(z_0 - z_\nu)} z^{-m} R(z) w_\nu \Big|_{z=e^{it}}.$$

Nun ist  $\vec{Z}(t) := z^{-m} Q(z) \Big|_{z=e^{it}}$  ein trigonometrisch polynomialer Vektor. Für jedes  $\nu \in \underline{d}$  teilt also  $(z - z_\nu)$  den polynomialen Vektor  $R(z) w_\nu$ .

Sei  $\kappa \in \underline{d}$  mit  $z_\kappa = e^{it_\kappa} \in \mathbb{S}^1$ . So ist  $w_\kappa \in \mathbb{R}^n$  und  $\vec{Y}(t) := \mathcal{Y}(t) w_\kappa$  definiert ein Jacobifeld  $\vec{Y} \in J^\perp(\gamma)$ . Wie oben folgt, dass  $V(z) := \frac{R(z) w_\nu}{z - z_\kappa}$  ein polynomialer Vektor ist. Wir schließen aus

$$\begin{aligned} \vec{Y}(t) &= z^{-m} R(z) w_\kappa \Big|_{z=e^{it}} = \sin\left(\frac{t - t_\kappa}{2}\right) \cdot \left( \frac{2i\sqrt{ze^{it_\kappa}}}{(z - e^{it_\kappa})} \frac{R(z) w_\kappa}{z^m} \right)_{z=e^{it}} \\ &= \sin\left(\frac{t - t_\kappa}{2}\right) \cdot \left( \frac{2i\zeta e^{i\frac{t_\kappa}{2}}}{\zeta^{2m}} \frac{R(\zeta^2) w_\kappa}{(\zeta^2 - z_\kappa)} \right)_{\zeta=e^{\frac{it}{2}}} = \sin\left(\frac{t - t_\kappa}{2}\right) \cdot \left( \frac{2ie^{i\frac{t_\kappa}{2}}}{\zeta^{2m-1}} V(\zeta^2) \right)_{\zeta=e^{\frac{it}{2}}}, \end{aligned}$$

dass  $\frac{\mathcal{Y}(t) w_\kappa}{\sin(\frac{t-t_\kappa}{2})} = \frac{2ie^{i\frac{t_\kappa}{2}}}{\zeta^{2m-1}} V(\zeta^2) \Big|_{\zeta=e^{\frac{it}{2}}}$  ein trigonometrisches Polynom in  $\frac{t}{2}$  ist. □

**Bemerkung 5.18:** In diesen Termen und mit  $z_0 = e^{it_0}$  lautet

$$\mathfrak{h}(z) = \sum_{\nu \in \underline{d}} \frac{-A^{(\nu,2)}}{\zeta - z_\nu} \Big|_{\zeta=z_0}^z = \sum_{\nu \in \underline{d}} \frac{-iz_\nu w_\nu w_\nu^T}{\zeta - z_\nu} \Big|_{\zeta=z_0}^z = \sum_{\nu \in \underline{d}} \frac{iz_\nu (z - z_0)}{(z - z_\nu)(z_0 - z_\nu)} w_\nu w_\nu^T. \quad (5.13)$$

Für  $z = e^{it} \in \mathbb{S}^1$  berechnen wir die Vorfaktoren. Sei zuerst  $z_\kappa \in \mathbb{S}^1$ , dann ist

$$\frac{-iz_\kappa}{\zeta - z_\kappa} \Big|_{\zeta=e^{it_0}}^{e^{it}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2ie^{i\frac{t}{2}} e^{i\frac{t_\kappa}{2}}}{e^{it} - e^{it_\kappa}} \cdot \frac{2ie^{i\frac{t_0}{2}} e^{i\frac{t_\kappa}{2}}}{e^{it_0} - e^{it_\kappa}} \cdot \frac{e^{it} - e^{it_0}}{2ie^{i\frac{t}{2}} e^{i\frac{t_0}{2}}} = \frac{\sin(\frac{t-t_0}{2})}{2 \sin(\frac{t_0-t_\kappa}{2}) \cdot \sin(\frac{t-t_\kappa}{2})}.$$

Sei  $z_\nu \notin \mathbb{S}^1$  und  $z_\mu = \frac{1}{\bar{z}_\nu}$ , so ist  $\overline{\left( \frac{iz_\nu(z-z_0)}{(z-z_\nu)(z_0-z_\nu)} \right)} = \frac{-i\bar{z}_\nu(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0})}{(\frac{1}{z} - \bar{z}_\nu)(\frac{1}{z_0} - \bar{z}_\nu)} = \frac{\frac{1}{\bar{z}_\nu}(z-z_0)}{(z - \frac{1}{\bar{z}_\nu})(z_0 - \frac{1}{\bar{z}_\nu})} = \frac{iz_\mu(z-z_0)}{(z-z_\mu)(z_0-z_\mu)}$ . Es folgt

$$\frac{iz_\nu}{\zeta - z_\nu} \Big|_{\zeta=e^{it_0}}^{e^{it}} w_\nu w_\nu^T + \frac{iz_\mu}{\zeta - z_\mu} \Big|_{\zeta=e^{it_0}}^{e^{it}} w_\mu w_\mu^T = 2\text{Re} \left( \frac{iz_\nu}{\zeta - z_\nu} \Big|_{\zeta=e^{it_0}}^{e^{it}} w_\nu w_\nu^T \right).$$



**Proposition 5.19:** *Es gibt maximal  $2n$  Nullstellen auf  $\mathbb{S}^1$ .*

Da  $M$  eine Blaschkemannigfaltigkeit ist, ist der Abstand zweier konjugierter Werte aus  $\pi\mathbb{Z}$ . Definieren also  $z_1$  und  $z_2$  zueinander konjugierte Werte, so ist  $z_2 = \pm z_1$ .

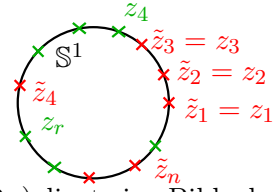
**Beweis:** Nach Lemma 5.17 wissen wir, dass  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{S}^1$  gilt und  $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}^n$  linear unabhängig sind. Es sei  $z_1, \dots, z_{n_0}$  alle paarweise verschiedenen Nullstellen von  $\det(g(z))$  auf  $\mathbb{S}^1$ . Ist  $n = n_0$ , so ist nichts zu zeigen. Sei also  $n > n_0$ . Wir sortieren sie zunächst „der Größe“ nach:

$$z_\nu = e^{it_\nu} \text{ mit } 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n_0} < 2\pi \text{ mit passendem } w_\nu \in \mathbb{R}^n, \text{ wie oben.}$$

Ferner wählen wir rekursiv  $n$  Nullstellen aus:

- (i) Es seien  $\tilde{z}_1 := z_1$ ,  $\tilde{t}_1 := t_1$  und  $\tilde{w}_1 := w_1$ .
- (ii) Es sei  $m(\nu) := \min \{ \mu \in \underline{n_0}; w_\mu \notin \text{Span}\{\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_{\nu-1}\} \}$  für  $\nu = 2, \dots, n$ . Wir setzen  $\tilde{z}_\nu := z_{m(\nu)}$ ,  $\tilde{t}_\nu := t_{m(\nu)}$  und  $\tilde{w}_\nu := w_{m(\nu)}$ .

Dann sind  $\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n$  linear unabhängig und definieren  $n$  linear unabhängige Jacobifelder  $\vec{Y}_\nu := \mathcal{Y}\tilde{w}_\nu \in J^\perp(\gamma)$ . Nach Lemma 5.17 gilt  $\vec{Y}_\nu(\tilde{t}_\nu) = 0$ .



Es sei  $r \in \underline{n_0} \setminus \text{Bild}(m)$ . Wir werden zeigen, dass  $t_r \in [\pi, 2\pi)$  liegt, im Bild also alle grünen Nullstellen auf dem unteren Halbkreis liegen müssen. Für  $\vec{Y} := \mathcal{Y}w_r$  gilt ebenfalls  $\vec{Y}(t_r) = 0$ . Ferner seien  $w_r := \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu \tilde{w}_\nu$  und  $s_1 := \min \{ \nu \in \underline{n}; \lambda_\nu \neq 0 \}$  sowie  $s_2 := \max \{ \nu \in \underline{n}; \lambda_\nu \neq 0 \}$ . Wir bemerken nach Wahl der  $\tilde{w}_\nu$ , dass  $t_{s_2} < t_r < 2\pi$  ist. Abschnittsweise definieren wir ein stückweise differenzierbares Vektorfeld  $\vec{J}$  längs  $\gamma|_{[t_{s_1}, t_r]}$ :

$$\vec{J}(t) := \begin{cases} \sum_{\nu=s_1}^k \lambda_\nu \vec{Y}_\nu(t) & , \text{ für } s_1 \leq k \leq s_2 - 1 \text{ und } \tilde{t}_k \leq t < \tilde{t}_{k+1} \\ \sum_{\nu=s_1}^{s_2} \lambda_\nu \vec{Y}_\nu(t) & , \text{ für } k = s_2 \text{ und } \tilde{t}_k \leq t \leq t_r \end{cases}.$$

Wegen  $\vec{Y}_k(\tilde{t}_k) = 0$  und  $\lim_{t \searrow \tilde{t}_k} \vec{J}(t) = \vec{J}(\tilde{t}_k) = \sum_{\nu=s_1}^k \lambda_\nu \vec{Y}_\nu(\tilde{t}_k) = \sum_{\nu=s_1}^{k-1} \lambda_\nu \vec{Y}_\nu(\tilde{t}_k) = \lim_{t \nearrow \tilde{t}_k} \vec{J}(t)$  ist  $\vec{J}$  wohldefiniert, stückweise differenzierbar und verschwindet in den Randpunkten  $\vec{J}(t_{s_1}) = 0 = \vec{J}(t_r)$ . In der Notation von [Spi79] ist  $\vec{J} \in \Omega_{\gamma|_{[t_{s_1}, t_r]}}$ . Für die Indexform, vergleiche [Spi79] oder [Mil73], gilt

$$\begin{aligned} E_{**}(\vec{J}, \vec{J}) &= - \int_{t_{s_1}}^{t_r} \langle \vec{J}, \frac{D^2}{ds^2} \vec{J} + R_\gamma(\vec{J}, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \rangle(s) ds - \sum_{\nu=s_1+1}^{s_2} \langle J(\tilde{t}_\nu), \Delta_{\tilde{t}_\nu} \frac{D\vec{J}}{dt} \rangle \\ &= - \sum_{\nu=s_1+1}^{s_2} \langle \vec{J}(\tilde{t}_\nu), \Delta_{\tilde{t}_\nu} \frac{D\vec{J}}{dt} \rangle. \end{aligned}$$

In dieser Summe verschwinden die Randterme, da  $\vec{J}$  dort 0 ist. Für  $s_1 + 1 \leq k \leq s_2$  ist

$$\begin{aligned} \Delta_{\tilde{t}_k} \frac{D\vec{J}}{dt} &= \lim_{t \searrow \tilde{t}_k} \left( \frac{D}{dt} \vec{J}(t) \right) - \lim_{t \nearrow \tilde{t}_k} \left( \frac{D}{dt} \vec{J}(t) \right) \\ &= \sum_{\nu=s_1}^k \lambda_\nu \frac{D}{dt} \vec{Y}_\nu(\tilde{t}_k) - \sum_{\nu=s_1}^{k-1} \lambda_\nu \frac{D}{dt} \vec{Y}_\nu(\tilde{t}_k) = \lambda_k \frac{D}{dt} \vec{Y}_k(\tilde{t}_k) \end{aligned}$$

und  $\vec{J}(\tilde{t}_k) = \sum_{\nu=s_1}^{k-1} \lambda_\nu \vec{Y}_\nu(\tilde{t}_k)$ . Da  $\mathcal{Y}$  ein Lagrangetensor ist, folgt

$$\langle \vec{J}(\tilde{t}_k), \lambda_k \frac{D}{dt} \vec{Y}_k(\tilde{t}_k) \rangle = \sum_{\nu=s_1}^{k-1} \lambda_\nu \lambda_k \langle \vec{Y}_\nu(\tilde{t}_k), \frac{D}{dt} \vec{Y}_k(\tilde{t}_k) \rangle = \sum_{\nu=s_1}^{k-1} \lambda_\nu \lambda_k \langle \frac{D}{dt} \vec{Y}_\nu(\tilde{t}_k), \vec{Y}_k(\tilde{t}_k) \rangle = 0$$

und damit auch  $E_{**}(\vec{J}, \vec{J}) = 0$ .

Es gilt Proposition 4.9 aus [Spi79]: „Es sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  ein Geodätische ohne konjugierte Punkte. Dann ist  $E_{**}(\vec{W}, \vec{W}) \neq 0$  für alle nicht verschwindenden  $\vec{W} \in \Omega_\gamma$ .“ Folglich muss  $\gamma|_{[\tilde{t}_{s_1}, t_r]}$  konjugierte Punkte tragen. Diese haben, da  $M$  eine Blaschkemanigfaltigkeit ist, einen Abstand von mindestens  $\pi$ . Also gilt

$$2\pi > t_r \geq \tilde{t}_{s_1} + \pi \geq \pi.$$

Daher ist  $\{z_\nu \in \mathbb{S}^1; z_\nu \notin \{\tilde{z}_\mu; \mu \in \underline{n}\}\} \subset \{e^{i\varphi}; \varphi \in [\pi, 2\pi)\}$ .

Wäre  $|\{z_\nu \in \mathbb{S}^1; z_\nu \notin \{\tilde{z}_\mu; \mu \in \underline{n}\}\}| > n$ , so wäre die Menge der zugehörigen Vektoren  $w_\nu$  linear abhängig. Wir könnten wie oben ein Vektorfeld  $\vec{J}_1$  konstruieren, das in den Endpunkten verschwindet und  $E_{**}(\vec{J}_1, \vec{J}_1) = 0$  erfüllt. Wir schließen, dass die Endpunkte nicht beide in  $\{e^{i\varphi}; \varphi \in [\pi, 2\pi)\}$  liegen können. Dies ist ein Widerspruch. Also ist  $|\{z_\nu \in \mathbb{S}^1; z_\nu \notin \{\tilde{z}_\mu; \mu \in \underline{n}\}\}| \leq n$ . □

Gibt es mehr als  $n$  Nullstellen, so impliziert der Beweis, dass der Konjugiertenradius  $\pi$  ist. Ist der Modellraum von  $M$  der  $\mathbb{RP}^n$ , so tritt der erste konjugierte Punkt erst nach einer Länge von  $2\pi$  auf. Es folgt:

**Korollar 5.20:** *Gibt es mehr als  $n$  Nullstellen auf der  $\mathbb{S}^1$ , so ist  $M$  einfach zusammenhängend, bzw. der Modellraum ist nicht  $\mathbb{RP}^n$ .*

Wir definieren eine polynomiale Matrix  $U(z) \in \mathbb{C}^{n \times n}[z]$  durch

$$U(z) := \sum_{\nu \in \underline{d}} -z_\nu \left( \prod_{\mu \in \underline{d} \setminus \{\nu\}} (z - z_\mu)^2 \right) \cdot w_\nu^T w_\nu \quad (5.14)$$

und sehen mit  $z = e^{it}$

$$(G(t))^{-1} = iz \sum_{\nu \in \underline{d}} \frac{A^{(\nu, 2)}}{(z - z_\nu)^2} = z \sum_{\nu \in \underline{d}} \frac{-z_\nu w_\nu w_\nu^T}{(z - z_\nu)^2} = \frac{z}{\prod_{\nu \in \underline{d}} (z - z_\nu)^2} \cdot U(z).$$

**Proposition 5.21:** *Es sei  $U \in \mathbb{C}_{sym}^{n \times n}[z]$  eine polynomiale Matrix wie in (5.14), das meint mit paarweise von 0 verschiedenen  $z_1, \dots, z_d$  sowie  $w_1, \dots, w_d \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$  und für alle  $\nu \in \underline{d}$  gibt es ein  $\mu \in \underline{d}$ , so dass  $z_\mu = \frac{1}{z_\nu}$  und  $w_\nu w_\nu^T = \overline{w_\mu} \overline{w_\mu}^T$  gilt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i)  $z^{-2m} \mathbf{g}(z) := \frac{1}{z} \cdot \prod_{\nu \in \underline{d}} (z - z_\nu)^2 \cdot (U(z))^{-1}$  ist eine trigonometrisch polynomiale Matrix mit reellen Werten auf der  $\mathbb{S}^1$  und polynomiale Matrix  $\mathbf{g}(z)$  mit  $\det(\mathbf{g}(z)) = C z^{d_0} \prod_{\nu \in \underline{d}} (z - z_\nu)^2$ .

(ii)  $\det(U(z))$  hat eine Nullstelle der Ordnung  $d - n$  in  $z_0 = 0$ .

**Beweis:** „(i) $\Rightarrow$ (ii)“: Wir berechnen:

$$\begin{aligned} C \det(U(z)) &= C \det \left( z^{2m-1} \prod_{\nu \in \underline{d}} (z - z_\nu)^2 \mathbf{g}(z)^{-1} \right) \\ &= z^{(2m-1)n} \prod_{\nu \in \underline{d}} (z - z_\nu)^{2n} \cdot z^{-d_0} \prod_{\nu \in \underline{d}} (z - z_\nu)^{-2} \\ &= z^{d-n} \prod_{\nu \in \underline{d}} (z - z_\nu)^{2(n-1)}, \end{aligned}$$

denn, da  $z^{-2m} \mathbf{g}(z)|_{\mathbb{S}^1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gilt, ist  $4mn = 2d_0 + 2d$  vergleiche Lemma 5.1.

„(ii) $\Rightarrow$ (i)“: Zunächst gilt für  $z = \frac{1}{z} \in \mathbb{S}^1$

$$\begin{aligned} (z^{-2m} \mathbf{g}(z))^{-1} &:= z \cdot \prod_{\nu \in \underline{d}} (z - z_\nu)^{-2} \cdot U(z) = z \sum_{\nu \in \underline{d}} \frac{-z_\nu}{(z - z_\nu)^2} w_\nu w_\nu^T \\ &= \frac{1}{z} \sum_{\mu \in \underline{d}} \frac{-1}{z_\mu (\frac{1}{z} - \frac{1}{z_\mu})^2} \overline{w_\mu} \overline{w_\mu}^T = \frac{1}{z} \sum_{\mu \in \underline{d}} \frac{-\overline{z_\mu} \overline{z}^2}{(\overline{z} - \overline{z_\mu})^2} \overline{w_\mu} \overline{w_\mu}^T = \overline{(z^{-2m} \mathbf{g}(z))^{-1}} \in \mathbb{R}^{n \times n}. \end{aligned}$$

Für  $\kappa \in \underline{d}$  und  $v \in \{\tilde{v} \in \mathbb{C}^n; w_\kappa^T \tilde{v} = 0\} = \text{Kern}(w_\kappa^T)$  ist ferner  $U(z)v$  durch  $(z - z_\kappa)^2$  teilbar. Wir wählen eine Basis  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}^n$  mit  $\det(v_1, \dots, v_n) = 1$  und  $v_2, \dots, v_n \in \text{Kern}(w_\kappa^T)$ . Dann sind  $n - 1$  Spalten von  $U(z) \cdot (v_1, \dots, v_n)$  durch  $(z - z_\kappa)^2$  teilbar. Damit ist  $\det(U(z)) = \det(U(z) \cdot (v_1, \dots, v_n))$  durch  $(z - z_\kappa)^{2(n-1)}$  teilbar. Wir erhalten mit einem geeigneten  $p(z) \in \mathbb{C}[z]$

$$\det(U(z)) = z^{d-n} \cdot \prod_{\nu \in \underline{d}} (z - z_\nu)^{2n-2} \cdot p(z).$$

Nun ist für  $z \in \mathbb{S}^1$

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \ni \det(z^{-2m} \mathbf{g}(z))^{-1} &= \det \left( \frac{zU(z)}{\prod_{\nu \in \underline{d}} (z - z_\nu)^2} \right) = \frac{z^n}{\prod_{\nu \in \underline{d}} (z - z_\nu)^{2n}} \det(U(z)) \\ &= \frac{z^d}{\underbrace{\prod_{\nu \in \underline{d}} \frac{1}{z_\nu} \cdot \prod_{\nu \in \underline{d}} (z - z_\nu)^2}_{\in \mathbb{R}, \text{ vgl. Lemma 5.1}}} \cdot \prod_{\nu \in \underline{d}} \frac{1}{z_\nu} \cdot p(z). \end{aligned}$$

Es folgt  $\prod_{\nu \in \underline{d}} \frac{1}{z_\nu} \cdot p(z) \in \mathbb{R}$ , also  $\frac{1}{z_\nu} \cdot p(z) \equiv p_0 \in \mathbb{R}$ . Wir hatten gesehen, dass die letzten  $n - 1$  Spalten von  $U(z) \cdot (v_1, \dots, v_n)$  durch  $(z - z_\nu)^2$  teilbar sind. Damit ist  $(U(z) \cdot (v_1, \dots, v_n))^{\text{ad}}$  durch  $(z - z_\nu)^{2(n-2)}$  teilbar, also auch  $(U(z))^{\text{ad}}$ . Wir sehen mit

$$z^{-2m} \mathbf{g}(z) = \frac{1}{z} \prod_{\nu \in \underline{d}} (z - z_\nu)^2 [U(z)]^{-1} = \frac{z^{n-d-1}}{p_0 \prod_{\nu \in \underline{d}} (z - z_\nu)^{2n-4}} (U(z))^{\text{ad}},$$

dass  $z^{-2m} \mathbf{g}(z)$  ein trigonometrisches Polynom ist. □

**Korollar 5.22:** Die Funktion  $z \mapsto \det \left( \sum_{\nu \in \underline{d}} \frac{-z_\nu w_\nu w_\nu^T}{(z - z_\nu)^2} \right) = \frac{\det(U(z))}{\prod_{\nu \in \underline{d}} (z - z_\nu)^{2n}}$  hat in  $z_0 = 0$  eine Nullstelle der Vielfachheit  $d - n$ .

Durch einsetzen von  $\frac{1}{z}$  erhält man leicht:

**Korollar 5.23:** Die Funktion  $z \mapsto \det \left( \sum_{\nu \in \underline{d}} \frac{-z_\nu w_\nu w_\nu^T}{(1 - z z_\nu)^2} \right)$  hat in  $z_0 = 0$  eine Nullstelle der Vielfachheit  $d - n$ .

**Proposition 5.24:**

Ist  $M$  eine Schraubenmannigfaltigkeit, also eine Blaschkemannigfaltigkeit, nicht isometrisch zum  $\mathbb{RP}^n$ , so gilt

$$\det \left( \sum_{\nu \in \underline{d}} \frac{-z_\nu w_\nu w_\nu^T}{z - z_\nu^2} \right) \equiv 0.$$

**Beweis:** Sei  $M$  nicht isometrisch zum  $\mathbb{RP}^n$ , so hat  $M$  den konjugierten Radius  $\pi$ . Ein Lagrangetensor  $\mathcal{Z}$  ab  $t_0$  mit  $\mathcal{Z}(t_0) = 0$  und  $\det \left( \frac{D}{dt} \mathcal{Z}(t_0) \right) \neq 0$  ist also genau auf  $t_0 + 2\pi \mathbb{Z}$  nicht injektiv, bzw.  $G_{\mathcal{Z}}(t) = (\mathcal{Z}(t))^T \mathcal{Z}(t)$  ist genau auf  $t_0 + 2\pi \mathbb{Z}$  nicht invertierbar. Sei  $t_0 \in I$  und  $z_0 = e^{it_0}$ , so dass  $-z_0 \notin \{z_\nu; \nu \in \underline{d}\}$  ist. Ein solcher ist für  $t \in I$  gegeben durch  $\mathcal{Z}(t) := \mathcal{Y}(t) \int_{t_0}^t (G(s))^{-1} ds = z^{-m} R(t) \mathbf{h}(z)|_{z=e^{it}}$ . Da beide Seiten trigonometrisch polynomiale Matrizen sind, gilt diese Gleichheit sogar für alle  $t \in \mathbb{R}$ , sofern die rechte Seite definiert ist. Wir berechnen  $0 = \det(G_{\mathcal{Z}}(t_0 + \pi)) = \det(G(t_0 + \pi)) \cdot \det(\mathbf{h}(-z_0))^2$ , also mit (5.13)

$$0 = \det(\mathbf{h}(-z_0)) = \det \left( \sum_{\nu \in \underline{d}} \frac{-iz_\nu w_\nu w_\nu^T}{\zeta - z_\nu} \Big|_{\zeta=z_0}^{-z_0} \right) = \det \left( \sum_{\nu \in \underline{d}} \frac{-2iz_\nu z_0}{(z_0^2 - z_\nu^2)} w_\nu w_\nu^T \right).$$

Dies gilt für alle  $t$  nahe  $t_0$  und nach Identitätssatz für alle  $z_0 \in \mathbb{C}$ . □

**Bemerkung 5.25:** Es sei

$$\Omega(\gamma) := \left\{ \mathcal{X} \in \Lambda(\gamma); \exists t_0 \in \mathbb{R} : \mathcal{X}(t_0) = 0 \wedge \det \left( \left( \frac{D}{dt} \mathcal{X}(t_0) \right)^T \frac{D}{dt} \mathcal{X}(t_0) \right) \neq 0 \right\}.$$

Es seien  $\mathcal{X} \in \Omega(\gamma)$  und  $t_0 \in \mathbb{R}$  passend mit  $z_0 := e^{it_0}$ . Ferner sei  $\mathcal{X}(t) := z^{-m} Q(z)|_{z=e^{it}}$  und  $\mathfrak{h} := (Q(z))^T Q(z)$ . Da  $M$  eine Blaschkemannigfaltigkeit ungleich  $\mathbb{RP}^n$  ist, ist  $\det(\mathfrak{h}(z)) = 0$  für ein  $z \in \mathbb{S}^1$  genau dann, wenn  $z \in \{\pm z_0\}$  gilt. Also hat jeder Lagrangetensor in  $\Omega(\gamma)$  genau zwei Nullstellen auf der  $\mathbb{S}^1$ . Wir wählen  $\mathcal{X} \in \Omega(\gamma)$  nun so, dass die Anzahl  $a$  der Nullstellen  $\zeta_1, \dots, \zeta_a \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{S}^1 \cup \{0\})$  maximal ist.

Es sei nun  $\mathcal{Y} \in \Lambda(\gamma)$ , so dass  $\det \mathfrak{g}(z_0) \neq 0$  ist und  $\det(G(z))$  maximal viele Nullstellen hat, also  $(G(t))^{-1} = iz \sum_{\nu \in \underline{d}} \frac{-z_\nu w_\nu^T w_\nu}{(z - z_\nu)^2}$  gilt. Ferner sei  $G(t_0) = E_{n \times n}$  die Einheitsmatrix. Dann ist

$$\mathcal{X}(t) = \mathcal{Y}(t) \int_{t_0}^t (G(\tau))^{-1} d\tau C.$$

Wir betrachten nun für kleine  $u \in \mathbb{R}$  die Familie

$$\mathcal{X}_u(t) = \mathcal{Y}(t) \int_{t_0+u}^t (G(\tau))^{-1} d\tau C \in \Omega(\gamma).$$

Sei weiter  $H_u(t) := (\mathcal{X}_u(t))^T \mathcal{X}_u(t)$  und  $\mathfrak{h}_u$  passend. Auch hier folgt wie in Lemma 5.10, dass

$$\varrho(u, z) := \det(\mathfrak{h}_u(z)) = \beta(u) z^B (z - \zeta_0(u))^{b_0^+} (z + \zeta_0(u))^{b_0^-} \prod_{\mu \in \underline{a}} (z - \zeta_\mu(u))^{b_\mu}$$

wohldefiniert ist mit differenzierbaren Funktionen  $u \mapsto \beta(u), \zeta_\mu(u)$ . Des Weiteren ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \Big|_{u=0} \log(\det(H_u(t))) &= \frac{\beta'(0)}{\beta(0)} + \frac{-b_1^+ \zeta_0'(0)}{z - \zeta_0} + \frac{b_1^- \zeta_0'(0)}{z + \zeta_0} + \sum_{\mu \in \underline{a}} \frac{-b_\mu \zeta_\mu'(0)}{z - \zeta_\mu} \Big|_{z=e^{it}} \\ &= \frac{d}{du} \Big|_{u=0} \log \left( \det(G(t)) \cdot (\det(C))^2 \cdot \left( \det \left( \int_{t_0+u}^t (G(\tau))^{-1} d\tau \right) \right)^2 \right) \\ &= 2 \operatorname{Spur} \left( \left( \int_{t_0}^t (G(\tau))^{-1} d\tau \right)^{-1} \right) \\ &= -2 \operatorname{Spur} \left( \left( \sum_{\nu \in \underline{d}} \frac{z_\nu w_\nu w_\nu^T}{z - z_\nu} \Big|_{z=w_0}^{e^{it}} \right)^{-1} \right). \end{aligned}$$

Die linke Seite dieser Gleichung hängt nur von der Variation  $u \mapsto \mathcal{X}_u$  ab, wohingegen die rechte Seite allein durch  $\mathcal{Y}$  bestimmt wird. Außerdem kennen wir auch das Produkt der Eigenwerte von  $\int_{t_0}^t (G(\tau))^{-1} d\tau$ :

$$\left( \det \left( \int_{t_0}^t (G(\tau))^{-1} d\tau \right) \right)^2 = \text{konst} \cdot \frac{z^B (z - \zeta_0)^{b_0^+} (z + \zeta_0)^{b_0^-} \prod_{\mu \in \underline{a}} (z - \zeta_\mu)^{b_\mu}}{z^{d_0} \prod_{\nu \in \underline{d}} (z - z_\nu)^2}$$

bzw.

$$\det \left( \int_{t_0}^t (G(\tau))^{-1} d\tau \right) = \text{konst} \cdot z^{\frac{B-d_0}{2}} \cdot \frac{(z - \zeta_0)^{\frac{b_0^+}{2}} (z + \zeta_0)^{\frac{b_0^-}{2}} \prod_{\mu \in \underline{a}} (z - \zeta_\mu)^{\frac{b_\mu}{2}}}{\prod_{\nu \in \underline{a}} (z - z_\nu)}$$

Bei der Frage, ob eine Schraubenmannigfaltigkeit ein D'Atri-Raum ist, vgl. Seite 33, ist das Volumenelement längs einer Geodätischen in Polarkoordinaten interessant. Betrachten wir  $p = \gamma(t_0)$ , so ist  $\omega_p(\tau, \frac{\gamma'(0)}{\|\dot{\gamma}(0)\|}) = c \cdot \sqrt{\det \left( (\mathcal{X}(\tau + t_0))^T \mathcal{X}(\tau + t_0) \right)}$  das Volumenelement längs  $\gamma$ , wobei die Konstante  $c$  von  $\|\dot{\gamma}(t)\|$  und  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , so dass die Spalten von  $\frac{D}{dt} \mathcal{X}(t_0) C$  ein Orthonormalsystem bilden, abhängt. Wenn man die Nullstellen  $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_a$  bestimmen kann, kann man prüfen, ob  $\omega_p(\tau, \frac{\gamma'(0)}{\|\dot{\gamma}(0)\|}) = \omega_p(-\tau, \frac{\gamma'(0)}{\|\dot{\gamma}(0)\|})$  gilt, und damit, ob  $M \subset \mathbb{R}^N$  ein D'Atri-Raum ist.

# Literaturverzeichnis

- [Bär10] C. BÄR, *Elementare Differentialgeometrie*, zweite Auflage, De Gruyter, Berlin u.a., 2010.
- [BD85] T. BRÖCKER und T. TOM DIECK, *Representations of compact Lie groups*, Springer, New York u.a., 1985.
- [BE81] J. K. BEEM und P. E. EHRLICH, *Global Lorentzian Geometry*, Marcel Dekker Inc., New York, 1981.
- [Bes78] A. L. BESSE, *Manifolds all of whose Geodesics are Closed*, Springer, Berlin u.a., 1978.
- [EO76] J.-H. ESCHENBURG und J. J. O’SULLIVAN, *Growth of Jacobi Fields and Divergence of Geodesics*, in *Mathematische Zeitschrift* 150(3): S. 221–237, 1976.  
URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01221148>
- [EO80] J.-H. ESCHENBURG und J. J. O’SULLIVAN, *Jacobi tensors and Ricci curvature*, in *Mathematische Annalen* 252(1): S. 1–26, 1980.  
URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01420210>
- [FL94] W. FISCHER und I. LIEB, *Funktionentheorie*, siebte Auflage, Vieweg, Braunschweig u.a., 1994.
- [Gre63] L. W. GREEN, *Auf Wiedersehensflächen*, in *Annals of Mathematics* 78(2): S. 289–299, 1963.
- [Gre81] W. GREUB, *Linear Algebra*, vierte Auflage, Springer, New York u.a., 1981.
- [HN91] J. HILGERT und K.-H. NEEB, *Lie-Gruppen und Lie-Algebren*, Vieweg, Braunschweig u.a., 1991.
- [Hon86] Y. HONG, *Helical Submanifolds in Euclidean Spaces*, in *Indiana University Mathematics Journal* 35(1): S. 29–43, 1986.  
URL <http://dx.doi.org/10.1512/iumj.1986.35.35002>

- [HQ08] Y. HONG und Y.-A. QIN, *Helical immersions of order 2*, in Southeast Asian Bulletin of Mathematics 32(4): S. 661–666, 2008.  
URL <http://www.seams-bull-math.ynu.edu.cn/archive.jsp>
- [Kni12] G. KNIEPER, *New results on noncompact harmonic manifolds*, in Commentarii Mathematici Helvetici 87(3): S. 669–703, 2012.  
URL <http://arxiv.org/abs/0910.3872>
- [Kön04] K. KÖNIGSBERGER, *Analysis*, Band 1 – 2, fünfte Auflage, Springer, Berlin u.a., 2004.
- [KPV96] O. KOWALSKI, F. PRÜFER und L. VANHECKE, *D'Atri spaces*, in *Topics in geometry*, Band 20 der Reihe *Progress Nonlinear Differential Equations and Their Applications*, S. 241–284, Birkhäuser Boston, Boston (Massachusetts), 1996.
- [Küh08] W. KÜHNEL, *Differentialgeometrie*, vierte Auflage, Vieweg, Wiesbaden, 2008.
- [Lit76] J. A. LITTLE, *Manifolds with planar geodesics*, in Journal Differential Geometry 11(2): S. 265–285, 1976.  
URL <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214433424>
- [Mil73] J. MILNOR, *Morse Theory*, Band 51, fünfte Auflage, Princeton University Press, Princeton (New Jersey), 1973.
- [Nik00] Y. NIKOLAYEVSKY, *Surfaces with simple geodesics*, in Tsukuba Journal of Mathematics 24(2): S. 233–247, 2000.
- [NS41] J. VON NEUMANN und I. J. SCHOENBERG, *Fourier integrals and metric geometry*, in Transactions of the American Mathematical Society 50: S. 226–251, 1941.
- [Rag80] D. L. RAGOZIN, *Curvatures and curves in Hilbert space*, in Mathematische Zeitschrift 173(1): S. 51–67, 1980.  
URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01215524>
- [Sak82] K. SAKAMOTO, *Helical Immersions Into a Unit Sphere*, in Mathematische Annalen 261(1): S. 63–80, 1982.  
URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01456411>
- [Sak84] K. SAKAMOTO, *On a Minimal Helical Immersion into a Unit Sphere*, in *Geometry of geodesics and related topics (Tokyo, 1982)*, Band 3 der Reihe *Advanced Studies in Pure Mathematics*, S. 193–211, North-Holland, Amsterdam, 1984.



- [Sak85a] K. SAKAMOTO, *Helical minimal imbeddings of order 4 into spheres*, in Journal of the Mathematical Society of Japan 37(2): S. 315–336, 1985.  
URL <http://dx.doi.org/10.2969/jmsj/03720315>
- [Sak85b] K. SAKAMOTO, *Helical minimal immersions of compact Riemannian manifolds into a unit sphere*, in Transactions of the American Mathematical Society 288(2): S. 765–790, 1985.  
URL <http://dx.doi.org/10.2307/1999963>
- [Sak86a] K. SAKAMOTO, *Helical immersions*, in *Curvature and Topology of Riemannian Manifolds (Katata, 1985)*, Band 1201 der Reihe *Lecture Notes in Math.*, S. 230–241, Springer, Berlin, 1986.  
URL <http://dx.doi.org/10.1007/BFb0075659>
- [Sak86b] K. SAKAMOTO, *Helical immersions into a Euclidean space*, in The Michigan Mathematical Journal 33(3): S. 353–364, 1986.  
URL <http://dx.doi.org/10.1307/mmj/1029003415>
- [Sak96] T. SAKAI, *Riemannian Geometry*, American Mathematical Society, Providence (Rhode Island), 1996.
- [Spi79] M. SPIVAK, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Band I - V, zweite Auflage, Publish or Perish Inc., Berkeley (Kalifornien), 1979.
- [SSW05] K. SHANKAR, R. SPATZIER und B. WILKING, *Spherical rank rigidity and Blaschke manifolds*, in Duke Mathematical Journal 128(1): S. 65–81, 2005.  
URL <http://dx.doi.org/10.1215/S0012-7094-04-12813-1>
- [Sza90] Z. I. SZABÓ, *The Lichnerowicz conjecture on harmonic manifolds*, in Journal of Differential Geometry 31(1): S. 1–28, 1990.  
URL <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214444087>
- [Tsu83] K. TSUKADA, *Helical Geodesic Immersions of Compact Rank One Symmetric Spaces into Spheres*, in Tokyo Journal of Mathematics 6(2): S. 267–285, 1983.  
URL <http://dx.doi.org/10.3836/tjm/1270213869>
- [VC84] P. VERHEYEN und B.-Y. CHEN, *Submanifolds with Geodesic Normal Sections*, in Mathematische Annalen 269(3): S. 417–429, 1984.  
URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01450703>
- [Ver85] P. VERHEYEN, *Submanifolds with geodesic normal sections are helical*, in Rendiconti del Seminario Matematico (già “Conferenze di Fisica e di Matematica”). Università e Politecnico di Torino 43(3): S. 511–527 (1986), 1985.



# Danksagung

Mein herzlicher Dank gilt Herrn Prof. Dr. Heber, dass er mich als Doktorand angenommen hat und mir vorschlug, mich mit der Geometrie von Schraubenmannigfaltigkeiten zu beschäftigen. Die Arbeit an dieser anschaulichen Fragestellung hat mir in den vergangenen vier Jahren viel Freude bereitet. Ich bedanke mich, dass er mir während meiner Promotionszeit fachkundig, geduldig und ermutigend zur Seite stand.

Weiterer Dank gilt meinen Arbeitskollegen für alle nichtmathematischen und mathematischen Gespräche. Besonders bedanke ich mich auch bei meiner Familie und meinen Freunden für ihre moralische Unterstützung und Geduld.

Danke.

*Die Realität ist eine Kurve.  
Terry Pratchett in „Voll im Bilde“.*



# Erklärung

Ich habe die vorliegende Arbeit, abgesehen von der Beratung durch den Betreuer meiner Promotion, unter Einhaltung guter wissenschaftlicher Praxis selbstständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Diese Arbeit hat weder ganz noch zum Teil an anderer Stelle im Rahmen eines Prüfungsverfahrens vorgelegen. Ebenso wurde diese Arbeit weder ganz noch zum Teil an anderer Stelle veröffentlicht oder zur Veröffentlichung eingereicht. Des Weiteren habe ich noch keinen Promotionsversuch unternommen.

Kiel, den 1. Februar 2013,   Martin Scheffel